LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES.

DU MÊME AUTEUR.

Leçons sur la Théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*). Grand in-8 .... 3 fr. 5o.

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les fonctions entières.** Grand in-8 .... 3 fr. 5o.

EN PRÉPARATION.

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les séries à termes positifs.** Grand in-8.

NOUVELLES LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES

PAR

ÉMILE BOREL,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

PRÉFACE.

L'accueil favorable que le public mathématique a bien voulu faire aux deux Ouvrages que j'ai déjà publiés sur la Théorie des fonctions m'est un précieux encouragement à continuer la tâche que j'ai entreprise. Comme je l'ai déjà dit dans une précédente Préface, mon intention est de faire paraître une série de petits Livres qui soient, autant que possible, indépendants les uns des autres : pour pouvoir lire chacun d'eux, il suffit de connaître les principes généraux de la Théorie des fonctions tels qu'ils se trouvent dans tous les cours d'Analyse.

La théorie des séries divergentes a fait l'objet de mon enseignement à l'École Normale en 1899-1900; mais ces *Leçons* sont notablement plus étendues que mon Cours; le Chapitre V, notamment, renferme l'exposition de certains résultats nouveaux que j'ai obtenus depuis un an.

M. Dauzats, agrégé-bibliothécaire à l'École Normale, qui avait suivi mon cours, avait bien voulu m'offrir de le rédiger. Par suite de diverses circonstances indépendantes de sa volonté, il n'a pu donner suite que partiellement à ce projet : la rédaction du Chapitre I lui est seule due. Je tiens à lui exprimer ici ma vive reconnaissance pour les soins qu'il a donnés à cette rédaction.

Étant donné l'intérêt que me paraît présenter le problème des séries divergentes et vu les polémiques ardentes qu'il a autrefois soulevées, j'ai cru devoir faire précéder d'une courte Introduction historique l'exposition des théories modernes. Cette Introduction se termine par quelques considérations générales sur les séries divergentes et par quelques indications sur le plan de ces Leçons.

INDEX.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES DIVERGENTES.

INTRODUCTION.

HISTORIQUE ET GÉNÉRALITÉS.

Les séries divergentes avant Abel et Cauchy.

On s'accorde généralement pour dater les débuts de l'Analyse moderne des travaux d'Abel et de Cauchy. Ce qui caractérise surtout ces deux géomètres, c'est le souci de la rigueur parfaite des raisonnements : c'est là la réforme essentielle qu'ils ont introduite dans les Mathématiques.

Sans doute, avant eux, bien des géomètres avaient fait des raisonnements rigoureux; plusieurs même avaient une sûreté parfaite et ne se trompaient que d'une manière exceptionnelle. D'autre part, depuis Abel et Cauchy, il a été imprimé souvent des raisonnements inexacts, et eux-mêmes n'ont pas toujours échappé à l'erreur. Mais le point essentiel est d'avoir proclamé hautement et nettement qu'un raisonnement non rigoureux, un raisonnement par induction ou par à peu près, doit être, en Mathématiques, considéré comme inexistant. Ce principe une fois posé, il appartenait aux successeurs d'Abel et de Cauchy d'en tirer toutes les conséquences et d'introduire peu à peu la rigueur parfaite des méthodes et des raisonnements qui caractérise le développement mathématique de la seconde moitié du siècle qui vient de finir.

Il est incontestable que la révolution ainsi accomplie a constitué un grand progrès et qu'elle était indispensable. On peut toutefois se demander si l'abandon complet des méthodes moins rigoureuses des géomètres du XVIIIe siècle a été un bien au point de vue de la facilité de la découverte mathématique. Il a pu être nécessaire de les abandonner momentanément d'une manière complète, pour permettre au principe de la rigueur nécessaire de s'établir sans contestation; mais maintenant que ce principe est établi d'une manière définitive et irrévocable, l'étude des méthodes anciennes peut avoir du bon, à condition, bien entendu, qu'on les emploie seulement comme procédé de recherche, en se réservant de démontrer ensuite les résultats par les méthodes rigoureuses de l'Analyse moderne.

La théorie des séries divergentes est l'une de celles auxquelles s'appliquent le plus immédiatement les généralités qui précèdent; nous allons nous occuper exclusivement de cette théorie, et tout d'abord rechercher quel était l'état de la question avant les premiers travaux d'Abel et de Cauchy.

Le procédé le plus commode, et peut-être aussi le plus sûr, pour faire cette recherche, consiste à consulter le grand Traité de Calcul différentiel et intégral de Lacroix [1].

On peut considérer, en effet, que cet Ouvrage résume l'Analyse ancienne; en le comparant avec l'*Analyse algébrique* de Cauchy [2], publiée seulement quelques années après, on mesure toute la distance qui sépare les Mathématiques du XVIIIe siècle des Mathématiques du XIXe. Peu de comparaisons sont plus instructives pour l'histoire de la Science.

Mais revenons aux séries divergentes et voyons ce que nous apprend à leur sujet le Traité de Lacroix; nous emprunterons aussi quelques renseignements bibliographiques au substantiel article de M. Pringsheim dans l'Encyclopédie Burkhardt-Meyer [3].

Il importe tout d'abord d'établir une distinction entre les séries purement numériques et les séries analytiques, c'est-à-dire dont

---

(1) S.-F. Lacroix, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral,* seconde édition, 3 vol. in-4, Paris, 1810, 1814 et 1819.

(2) *Œuvres de Cauchy,* série II, t. III. La première édition est de 1821.

(3) *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften,* I, A. 3, § 39-40.

les termes sont des fonctions d'une variable (ou de plusieurs; mais nous nous bornerons au cas d'une seule).

En ce qui concerne les séries divergentes numériques, l'impossibilité apparaît d'abord immédiatement de les utiliser directement pour un calcul précis.

Il est cependant un cas dans lequel elles ont paru pouvoir servir à un calcul approximatif; et, en fait, dans la pratique, on n'a jamais besoin que d'une approximation limitée; il est même presque toujours impossible de faire un calcul *exact*. Le cas dont nous voulons parler est celui où les termes de la série divergente commencent à decroître jusqu'à un certain terme minimum, pour augmenter d'ailleurs ensuite au delà de toute limite. En calculant la somme de la série jusqu'au terme minimum, on peut espérer avoir un résultat approché, dont l'approximation sera du même ordre de grandeur que ce terme et pourra, par suite, être très notable, si ce terme est suffisamment petit.

Souvent même, on n'aura pas besoin d'aller jusqu'au terme minimum, qui occupera un rang très élevé et sera bien plus petit que l'approximation désirée; on calculera simplement les premiers termes de la série, jusqu'à ce qu'on arrive à des termes assez petits pour qu'on puisse les considérer comme négligeables, et l'on adoptera la somme ainsi trouvée pour valeur approchée de la série.

L'exemple classique en Analyse de la série pour laquelle cette méthode réussit est la série de Stirling; mais nous aurons l'occasion d'y revenir tout à l'heure. Un exemple plus important est celui des séries que les astronomes emploient dans leurs calculs; ils les ont utilisées longtemps sans se douter qu'elles étaient divergentes, en calculant seulement les premiers termes. Depuis que M. Poincaré, dans un Mémoire célèbre (1), a démontré leur divergence, on continue à les utiliser dans bien des cas, car on y est encouragé par l'exactitude des résultats obtenus, en tous points conformes aux observations. Nous verrons, dans le Chapitre I, consacré à la théorie des séries asymptotiques de M. Poincaré, comment cette théorie permet de se rendre compte de ce fait, en apparence paradoxal.

(1) *Acta mathematica*, t. XIII.

Mais il est des séries divergentes numériques qui présentent un tout autre caractère; leurs termes ne vont pas en décroissant, ou même croissent constamment à partir du premier et augmentent au delà de toute limite.

Comme exemples typiques de telles séries, on peut citer les deux suivantes, que l'on rencontre assez fréquemment dans les applications, et qui sont étudiées toutes deux dans le Traité de Lacroix :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{1}$$

$$1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots. \tag{2}$$

La série (1), qui paraît avoir été considérée pour la première fois par Jacques Bernoulli et Leibnitz, a été très souvent choisie comme type de série divergente; elle a donné lieu, depuis Euler jusqu'à Cauchy, à de nombreuses discussions, et, après Cauchy, on l'a souvent signalée comme exemple de l'emploi illégitime des séries divergentes.

Euler considère la somme de la série (1) comme égale à $\frac{1}{2}$; et cette affirmation a pour lui la signification suivante : si, *par un calcul quelconque,* on est conduit à la série (1), le résultat de ce calcul est certainement $\frac{1}{2}$.

Ainsi présentée et prise à la lettre, la proposition d'Euler n'est certainement pas exacte, et l'on ne tarda pas à s'en apercevoir. Déjà plusieurs auteurs, Pierre Varignon, Nicolas Bernoulli, d'Alembert, avaient signalé le danger de l'emploi des séries divergentes. J'emprunte à M. Pringsheim la citation suivante de d'Alembert : « Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes... me paraîtront très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs. » (*Opusc. math.,* 5, 1768, p. 183).

Relativement à la série d'Euler, l'objection suivante se présenta bientôt.

Soient n et m ($n < m$) deux entiers positifs; on a

$$\frac{1 - x^n}{1 - x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} - \ldots. \tag{3}$$

Si l'on fait $x = 1$, on obtient

$$\frac{n}{m} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots.$$

La série d'Euler a donc ainsi pour somme une fraction positive quelconque.

Lagrange [1] montra cependant que l'objection précédente pouvait être levée; Leibnitz avait fait reposer le calcul de la série (1) sur le calcul des probabilités; la somme de la série (1) étant 1 ou 0 suivant que l'on prend un nombre impair ou pair de termes, elle est aussi souvent égale à 1 qu'à zéro; donc sa valeur la plus probable est égale à la moyenne $\frac{1}{2}$. Lagrange fait observer que, si l'on veut appliquer la même méthode à la série (3), on doit observer qu'elle n'est pas complète et que si, pour plus de netteté, on prend $n = 3$, $m = 5$, elle doit s'écrire

$$1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 + 0 + x^{10} + 0 + \ldots.$$

Dès lors, on voit que, si l'on prend la somme successivement de 1, 2, 3, 4, 5, ... termes de la série, on constate que, sur cinq sommes consécutives, trois sont égales à 1 et deux à zéro; la valeur moyenne est donc $\frac{3}{5}$, ce qui est bien la vraie valeur de la fonction qui a donné naissance à la série.

On peut prouver que le résultat ainsi obtenu n'est point dû au hasard et démontrer même, comme l'a fait voir M. Frobenius [2], une proposition plus générale; si l'on pose

$$\sum_0^n a_i = s_n,$$

on a

$$\lim_{x=1} \sum_0^\infty a_n x^n = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1} + s_n}{n},$$

dans le cas où la limite du second membre existe. On voit ainsi

---

(1) *Voir*, pour cette discussion, LACROIX, t. III, p. 160; et LAGRANGE, Rapport sur le Mémoire de Callet, dans le Tome III des *Mémoires de la classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut*.

(2) *Journal de Crelle*, t. 89, p. 262.

que la série, qui peut être divergente,

$$\sum_0^\infty a_n$$

peut être considérée comme ayant pour somme la moyenne arithmétique des diverses sommes obtenues en prenant successivement 1, 2, 3, 4, ... termes (ou du moins la limite de cette moyenne arithmétique).

Mais l'objection précédente n'est pas la seule que l'on puisse faire contre la proposition d'Euler; il est aisé de former des séries dont les termes dépendent d'une variable et qui se réduisent à la série d'Euler pour une valeur particulière de cette variable, alors que la valeur limite de la série est un nombre absolument quelconque.

Empruntons-en deux exemples à M. Pringsheim.

On a

$$(4) \qquad \frac{-1}{1+x} = x - 1 + x^3 - x^2 + x^5 - x^4 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{-1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

On peut d'ailleurs donner à la série (4), à laquelle on pourrait reprocher un arrangement arbitraire des termes, la forme suivante :

$$(5) \qquad \sum_0^\infty x^{n+(-1)^n}$$

dans laquelle les exposants sont les valeurs successives pour $n = 0$, 1, 2, 3, ... d'une fonction simple de n.

De même, en désignant par $E(x)$ la partie entière de x, on a

$$\sum_0^\infty (-1)^n x^{E\left(\frac{n}{2}\right)} = 1 - 1 + x - x + x^2 - x^2 + \ldots,$$

d'où, pour $x = 1$,

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

Il serait aisé de multiplier et de varier ces exemples; faut-il en conclure, avec M. Pringsheim, que l'affirmation d'Euler est dépourvue de toute valeur et doit être complètement rejetée? Nous ne le pensons pas. Il importe, en effet, de remarquer que les anciens géomètres n'avaient point l'habitude de construire artificiellement des expressions analytiques compliquées pour prouver telle ou telle opinion; ils se contentaient, d'habitude, de calculer sur les expressions qui se présentaient naturellement à eux, au cours de leurs recherches.

Il doit donc être expressément sous-entendu, dans l'affirmation d'Euler que, *si l'on est conduit à la série* (¹) *par n'importe quel*

(¹) On devra, bien entendu, tenir compte des remarques de Lagrange rappelées page 5, relativement aux séries qu'il est naturel de considérer comme incomplètes et de compléter par des termes nuls. Si cependant la loi des termes manquants est suffisamment *régulière*, la proposition d'Euler paraît être encore vraie. Mais je ne puis ici préciser le sens du mot *régulière;* je renverrai à mes *Leçons sur les fonctions entières*, Note II, où l'on trouvera quelques indications à ce sujet, en attendant que je puisse publier une théorie générale de la croissance des fonctions.

Comme exemple d'une série importante en Analyse et où il manque des termes en grand nombre, on peut citer la suivante

$$s = 1 - q + q^4 - q^9 + q^{16} - q^{25} + q^{36} - \ldots.$$

Lorsque q tend vers $+1$ par valeurs réelles, la limite de s est $\frac{1}{2}$, de sorte que l'on a, à la limite

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots.$$

Voici de ce fait une démonstration très élégante, due à M. J. Tannery. On a

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4(v) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2 q^{n^2} \cos 2 n \pi v \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2 q^{2n-1} \cos 2 \pi v + q^{4n-2}).\end{aligned}$$

En faisant $v = 0$, on obtient

$$\mathfrak{S}_4(0) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}) \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \right]^2.$$

Lorsque q est réel et positif, tous les facteurs du produit infini sont inférieurs à l'unité; on en conclut immédiatement que ce produit tend vers zéro lorsque q tend vers $+1$; si l'on observe que l'on a

$$\mathfrak{S}_4(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots,$$

calcul, on peut sans hésitation la remplacer par $\frac{1}{2}$, qu'il s'agit seulement des calculs que l'on sera conduit naturellement à faire, et non d'expressions construites exprès pour mettre la règle en défaut. Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant au point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi,* a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série telle que (5), pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérimental,* puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient.

Aussi n'y a-t-il point lieu de blâmer Fourier de s'en être servi sans scrupule (*Œuvres,* t. I, p. 206). Fourier fait d'ailleurs usage, dans le même Ouvrage (p. 191) de produits infinis divergents et il suffit de consulter la Note dans laquelle M. Darboux a rétabli le raisonnement rigoureux, pour se rendre compte que Fourier savait parfaitement ce qu'il faisait et ne risquait nullement de se tromper.

Mais nous nous sommes assez étendus [1] sur la série (1); disons quelques mots de la série

$$(2) \qquad 1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + 1.2.3.4.5 - \ldots.$$

on en conclut immédiatement le théorème que nous avons énoncé relativement à la série s.

Ce théorème peut s'étendre, par l'emploi des formules de transformation (Tannery et Molk, *Traité des fonctions elliptiques,* t. II, formule XLIII_6), au cas où l'on suppose que q tend vers -1 en suivant un chemin quelconque non tangent au cercle de convergence; je dois aussi ce dernier résultat à une obligeante communication de M. Tannery.

[1] Faisons observer cependant que, *si l'on attribue une somme* à la série (1), cette somme ne saurait être autre que $\frac{1}{2}$; car si l'on pose

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

Il ne peut être ici question de prendre une moyenne de sommes successives; cette moyenne n'existe pas; on ne peut pas non plus, comme il pourrait être suggéré par ce qui précède, introduire une variable x et chercher la limite de la série

$$(2)' \qquad 1 - 1.2x + 1.2.3x^2 - 1.2.3.4x^3 + \ldots$$

lorsqu'on y fait $x = 1$. Cette série $(2)'$ est, en effet, divergente pour toute valeur de x.

Lacroix obtient la somme de la série (2) par une transformation assez compliquée (t. III, p. 347); le résultat ainsi obtenu coïncide d'ailleurs avec la valeur d'une intégrale qui donne naissance à la série $(2)'$ et dont nous parlerons plus loin (p. 56).

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, on voit que, malgré des hésitations et des scrupules qui devaient mettre en garde contre les erreurs grossières, les géomètres du temps de Lacroix avaient d'assez bonnes raisons *expérimentales* d'avoir confiance dans les séries divergentes, même numériques.

A plus forte raison employaient-ils sans le moindre scrupule les séries divergentes dont les termes étaient des fonctions d'une variable. Considérant simplement au point de vue formel les calculs exécutés sur ces séries, ils étaient amenés à constater que les résultats de ces calculs exprimaient des faits analytiques précis, d'où ils tiraient des conséquences le plus souvent, sinon toujours, exactes [1]. Nous verrons plus loin comment de tels résultats sont aisément explicables.

---

on a

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S$$

d'où $S = \frac{1}{2}\cdot$ Relativement aux objections que l'on pourrait faire à ce raisonnement, en changeant l'ordre des termes, *voir* plus loin, p. 17.

[1] Le passage suivant du Traité de Lacroix (t. I, p. 4) montre très nettement le point de vue auquel il se plaçait :

« Il est à propos de faire attention au mot *développement* que l'on emploie ici au lieu de celui de *valeur;* car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle elle appartient : quelquefois même, au lieu d'en approcher davantage, à mesure qu'on prend plus de termes, elle s'en éloigne sans cesse, ainsi qu'on peut le remarquer sur la fraction $\frac{a}{a-x}$ développée suivant les puissances de x. La série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

qui en résulte ne donne des résultats convergents vers la vraie valeur que dans

En somme, on peut résumer l'état de la Science à l'époque de Lacroix en disant que l'on avait dans les séries divergentes une confiance justifiée par les faits, mais cependant rendue prudente et quelque peu hésitante par des difficultés telles que celle qui a été étudiée page 5.

Les travaux de Cauchy.

Nous venons de dire que, à l'époque où Abel et Cauchy commencèrent à écrire, on avait, dans les séries divergentes, une confiance justifiée presque toujours, sinon toujours, par les faits. Aussi n'est-ce pas sans hésitation qu'Abel et Cauchy frappèrent

---

le cas où $x < a$; ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis de l'employer à déterminer par approximation cette vraie valeur, mais cependant l'expression

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

considérée en faisant abstraction du dernier terme, c'est-à-dire comme contenant toujours des termes de même forme, quelque loin qu'on la prolonge, est tellement liée avec la fraction $\frac{a}{a-x}$, que si une question nous conduisait à la série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots$$

nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$; ou si nous découvrions quelque propriété relative à une suite de termes tels que $1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \ldots$, nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fonction $\frac{a}{a-x}$. Pour sentir la vérité de cette assertion, il suffit d'observer que le développement régulier d'une fonction, considéré dans toute son étendue, vérifie l'équation qui caractérise cette fonction. Dans l'exemple que j'ai choisi, si l'on fait $\frac{a}{a-x} = y$, on en conclura l'équation

$$a - (a - x)y = 0$$

et si l'on substitue, au lieu de la fonction y, son développement

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \ldots,$$

on verra que, quelque loin qu'on le calcul pousse, les termes se détruiront toujours. On conçoit sans peine qu'il en serait de même dans tout autre exemple, et d'ailleurs il s'en présentera un grand nombre dans la suite de ce Traité. »

On verra qu'il y a peu de chose à ajouter aux idées de Lacroix pour obtenir la base d'une théorie rigoureuse des séries divergentes.

d'ostracisme les séries divergentes. Quelques citations montreront bien quels furent leurs scrupules. Abel écrit à Holmboë, le 16 janvier 1826 (*Œuvres complètes d'Abel,* édition Sylow-Lie, t. II, p. 256-257) : « Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration... la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. *Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant* ».

D'autre part, dans la Préface de son *Analyse algébrique,* dès 1821, Cauchy écrit : « J'ai été *forcé d'admettre* diverses propositions qui paraîtront peut-être *un peu dures;* par exemple, qu'une série divergente n'a pas de somme... ».

On voit combien sont grands les scrupules de Cauchy ; aussi ne doit-on pas s'étonner qu'il se soit posé, lui aussi, le problème énoncé par Abel dans le passage que nous avons cité, et ait recherché comment l'emploi des séries divergentes peut conduire, d'une manière presque constante, à des résultats exacts, tout en n'étant pas théoriquement légitime. Une mort prématurée n'a malheureusement pas permis à Abel de s'occuper de cette question, comme il en annonce l'intention ; aussi avons-nous dû mettre le nom seul de Cauchy en tête de ce paragraphe.

En parcourant ses Œuvres, on se rend compte que le désir de trouver un mode d'utilisation des séries divergentes ne l'a jamais abandonné; il y revient à plusieurs reprises. Il se préoccupe aussi des intégrales définies dépourvues de sens, question connexe à celle des séries divergentes et pouvant être traitée par des méthodes en partie analogues, mais que nous laisserons systématiquement de côté, désireux de délimiter bien nettement notre sujet, et ne voulant pas y mêler un problème, intéressant sans doute, mais à peine effleuré jusqu'ici et qui appelle encore bien des recherches.

Sur les séries divergentes, les travaux de Cauchy sont d'importance très inégale; le court Mémoire sur la série de Stirling (1) se distingue nettement des autres par la clarté et la beauté de ses résultats; nous étudierons en détail ce Mémoire au début du Chapitre I; contentons-nous de dire ici que Cauchy y justifie, pour

(1) *Comptes rendus,* t. XVIII, p. 370. — *Œuvres de Cauchy,* série I, t. VIII, p. 18.

la série de Stirling, le procédé de calcul approximatif dont nous avons parlé tout à l'heure (p. 3), pour les séries dont les termes décroissent d'abord beaucoup pour croître ensuite au delà de toute limite.

La théorie de Cauchy ne s'applique d'ailleurs pas à la seule série de Stirling; comme nous le verrons, il fait observer qu'elle s'applique aussi à une classe fort générale de séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.

Mais cette partie du Mémoire de Cauchy, étant restée sans applications, est tombée dans l'oubli et la série de Stirling a été le seul exemple classique de *série asymptotique,* jusqu'au jour où M. Poincaré a fait une théorie générale de cette classe de séries, théorie dont les traits essentiels sont exposés dans le Chapitre I.

Parmi les autres recherches de Cauchy sur les séries divergentes, on doit citer sa théorie des séries *syntagmatiques*. Cauchy donne ce nom à des séries ordonnées suivant les puissances de plusieurs variables et qui sont convergentes ou divergentes, suivant la manière dont on arrange leurs termes. Nous devons nous borner à ces brèves indications, renvoyant pour les détails aux Mémoires de Cauchy [1]. Signalons cependant un fait curieux : l'analogie certaine, quoique assez éloignée, de ces recherches de Cauchy avec les travaux récents de M. Mittag-Leffler, dont il sera question au Chapitre V. Nous devons d'ailleurs nous empresser de dire que les Mémoires de Cauchy, faute d'applications simples, étaient complètement tombés dans l'oubli, et que M. Mittag-Leffler n'en avait nulle connaissance lorsqu'il a fait sa belle découverte.

Le fait essentiel qui se dégage de cette revue rapide des travaux de Cauchy sur les séries divergentes, c'est que le grand géomètre n'a jamais perdu de vue la question des séries divergentes et a cherché constamment à atténuer cette proposition « un peu dure », suivant ses propres termes, *qu'une série divergente n'a pas de somme*. Les successeurs immédiats de Cauchy, au contraire, ont accepté cette proposition sans atténuation ni restriction, et paraissent avoir perdu complètement de vue les efforts qu'il a faits pour en diminuer la brutalité. Ils conservèrent seulement le souvenir

---

[1] *Comptes rendus*, t. XX, p. 329. — *Œuvres de Cauchy*, série I, t. IX, p. 19.

de la théorie relative à la série de Stirling; mais la possibilité d'utiliser pratiquement cette série divergente apparaissait comme une curiosité tout à fait isolée, et sans importance au point de vue des idées générales que l'on pouvait chercher à se faire sur l'Analyse.

Les séries divergentes depuis Cauchy. — Le problème actuel.

Comme nous venons de le dire, on cessa, après la mort de Cauchy (1857), de se préoccuper des séries divergentes; c'est seulement plus de vingt ans après que paraît un travail se rattachant à cette question; je veux parler du *Mémoire de Laguerre sur l'intégrale* (¹)

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x}.$$

Nous dirons quelques mots de ce Mémoire au début du Chapitre II; contentons-nous de remarquer ici qu'il renferme seulement un fait isolé et ne paraissant pas pouvoir servir de base à une théorie générale. C'est seulement bien plus tard que Stieltjes, généralisant d'une manière fort large le résultat de Laguerre, a créé la belle théorie que nous exposerons dans ce Chapitre.

Mais c'est à 1886 qu'il faut faire remonter les premières recherches à la fois générales et rigoureuses, sur des séries divergentes. A cette époque, parurent simultanément deux Mémoires, l'un de Stieltjes (²), l'autre de M. Poincaré (³) sur les séries que le premier appelait *semi-convergentes* et le second *asymptotiques*. C'est ce dernier terme qui a prévalu; la théorie de M. Poincaré a, en effet, une portée bien plus haute que celle de Stieltjes, comme on s'en rendra compte aisément en lisant le Chapitre I.

Ce qui caractérise la théorie de M. Poincaré et lui donne sa grande importance, c'est qu'elle est basée essentiellement sur la

(¹) *Œuvres de Laguerre,* t. I, p. 428. — *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. VII.

(²) STIELTJES, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Annales de l'École normale,* 1886).

(³) POINCARÉ, *Acta mathematica,* t. VIII.

possibilité d'appliquer aux séries asymptotiques, dans des conditions bien déterminées que nous apprendrons à connaître, les règles ordinaires du calcul algébrique et du calcul intégral. *Les opérations ainsi effectuées correspondent exactement aux opérations analogues effectuées sur les fonctions que l'on fait correspondre aux séries.* C'est là le fait essentiel qui est le fondement de la théorie de M. Poincaré et qui doit être, *mutatis mutandis,* le fondement de toute théorie des séries divergentes qui aspire à être susceptible d'applications.

On trouvera dans les Chapitres III, IV, V, l'exposé de travaux plus récents sur les séries divergentes, travaux dans lesquels j'ai eu une part assez grande pour qu'il ne m'appartienne point de les commenter; je préfère terminer ce Chapitre en indiquant brièvement les principes fondamentaux qui m'ont guidé et qui dérivent d'ailleurs des remarques qui viennent d'être faites à propos de la théorie de M. Poincaré.

Il semble qu'à propos des séries divergentes on puisse se poser deux problèmes principaux, dont le second est, comme nous le verrons, un cas particulier du premier, mais mérite cependant d'être traité à part.

Le problème fondamental est le suivant : *Faire correspondre à chaque série divergente numérique un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.* Il y aura lieu d'ailleurs, une fois ce premier résultat acquis, de fixer des classes, le plus étendues possible, de méthodes de calcul dans lesquelles on est *certain* que la substitution du nombre à la série est légitime. Pour les calculs ne rentrant pas dans les classes étudiées, on devra regarder le résultat obtenu comme seulement probable, et chercher à le vérifier par d'autres méthodes.

Il est d'ailleurs à peine utile d'observer qu'on ne peut guère espérer résoudre le problème précédent pour *toutes* les séries divergentes; l'infinité non dénombrable des modes de divergence paraît être un obstacle insurmontable; mais ce serait déjà un résultat fort important de l'avoir résolu pour les séries divergentes que l'on peut être effectivement amené à rencontrer dans les applications.

On pourrait d'ailleurs être amené, comme nous en verrons des exemples plus loin, à attribuer *plusieurs sommes différentes* à une série divergente [1]; ce fait peut paraître tout d'abord étrange et paradoxal; il n'aurait pas paru moins étrange à un géomètre du XVIII^e siècle d'entendre affirmer que l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dz}{z}$$

n'a pas seulement pour valeur $\log 2$, mais doit être considérée comme égale à

$$\log 2 + 2k\pi i,$$

k étant un nombre entier quelconque.

Mais nous laisserons à peu près complètement de côté cette question des valeurs multiples des séries.

Il est aisé de fixer, *a priori*, diverses conditions auxquelles devra satisfaire le nombre que nous appellerons la *somme* de la série divergente, par une extension naturelle du sens de ce mot.

Il est d'abord clair que si les séries de termes généraux u_n et v_n ont pour somme U et V, la série de terme général $au_n + bv_n$ devra avoir pour somme $a\mathrm{U} + b\mathrm{V}$, quelles que soient les constantes a et b.

Il est clair aussi que si la série

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a pour somme U, la série

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$$

doit avoir pour somme

$$\mathrm{U} - (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}).$$

De même, dans des conditions à préciser, la multiplication des séries divergentes devra être possible, et la série *produit* devra avoir pour somme le produit des sommes des séries *facteurs*.

Les remarques précédentes permettent déjà de calculer la valeur *nécessaire* que l'on doit attribuer à la somme de certaines séries, si toutefois il est possible de leur attribuer une valeur. Nous les

---

(1) Et aussi à une série convergente.

avons déjà utilisées, en fait, page 8, à propos de la série d'Euler. Voici un autre exemple : soit

$$s = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots.$$

On a

$$s = 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots) = 1 - 2s,$$

d'où

$$s = \tfrac{1}{3}.$$

Il est cependant deux opérations que l'on devra se garder d'effectuer sur les séries divergentes : c'est le changement de l'ordre des termes, et le remplacement de termes consécutifs par leur somme [1], *lorsque ces opérations seront faites une infinité de fois,* car il résulte, d'une remarque faite à la page précédente, que ces opérations sont légitimes lorsqu'on ne les effectue qu'un nombre limité de fois.

Il est manifeste d'ailleurs que la seconde des opérations dont nous venons de parler ne saurait être légitime si la première ne l'est pas ; car, en effectuant successivement cette seconde opération et l'opération inverse, on peut obtenir un changement pur et simple de l'ordre des termes, c'est-à-dire effectuer la première opération [2].

Or, un peu de réflexion suffit pour se rendre compte que ce changement de l'ordre des termes ne saurait être légitime.

On sait, en effet, que, même dans le cas des séries convergentes, on peut modifier la somme à volonté en changeant l'ordre des termes, toutes les fois que la série n'est pas absolument convergente.

---

(1) Ou, inversement, la décomposition d'un terme en une somme de plusieurs autres.

(2) Par exemple, la série d'Euler s peut s'écrire

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

et ensuite

$$(-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$-1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

ou $-s$.

D'ailleurs, on peut démontrer [1] que si l'on désigne par δ_n le déplacement du terme de rang n de la série, c'est-à-dire la différence entre les nombres qui expriment son rang dans la série primitive et dans la série modifiée, il suffit, pour que le changement de l'ordre des termes n'altère pas la valeur de la série, que l'on ait

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \delta_{n-p} u_n = 0,$$

ou bien

$$(1') \qquad \lim_{n=\infty} \delta_n u_{n+p} = 0,$$

quel que soit l'entier positif p qui peut varier avec n; ces deux conditions sont d'ailleurs équivalentes; mais il ne suffit pas que l'on ait

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \delta_n u_n = 0.$$

Or, pour une série convergente, dont les termes tendent nécessairement vers zéro, la condition (1) est nécessairement vérifiée si tous les δ_n sont finis. Mais pour une série divergente, dont les termes ne tendent généralement pas vers zéro, la condition (2) ne sera pas vérifiée, même si les δ_n ne dépassent pas l'unité. Il est donc fort naturel, par analogie avec ce qui se passe pour les séries convergentes, que le changement de l'ordre des termes altère la valeur de la série. Des exemples très aisés à former montrent d'ailleurs qu'il en est effectivement ainsi.

On doit donc considérer, dans une série, le rang de chaque terme comme faisant partie intégrante de ce terme; une série n'est pas seulement une collection dénombrable de nombres; c'est une telle collection, dont les éléments sont rangés dans un ordre déterminé, et cet ordre importe autant que la valeur des éléments. Sans doute, pour les séries absolument convergentes, la somme ne dépend pas de cet ordre et, à un certain point de vue, on peut en faire abstraction; mais il n'en serait sans doute plus de même si l'on s'inquiétait des diverses valeurs que peuvent avoir ces séries, comme nous l'avons dit p. 15.

Cette manière de considérer les séries : une collection de

---

[1] *Voir* Borel, *Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1890).

nombres, *dont chacun a un rang déterminé,* est, à mon sens, *tout à fait essentielle en Analyse;* il faut y ajouter qu'une modification portant sur un nombre *limité* de rangs, et pouvant par suite diminuer tous les rangs d'un nombre fixe, à partir d'un certain terme, *est sans importance;* mais c'est *à l'infini,* si l'on peut ainsi s'exprimer, c'est-à-dire dans les termes dont le rang augmente indéfiniment, qu'il importe de ne pas bouleverser l'arrangement de la série, sous peine de changer complètement son caractère.

Laissant maintenant de côté les séries divergentes numériques, passons au second problème que nous avions annoncé : il est relatif aux séries de fonctions toujours divergentes. La théorie des séries de fonctions tantôt convergentes, tantôt divergentes, suivant la valeur de la variable (ou des variables) se rattache, en effet, à la théorie du prolongement analytique et il n'y a pas lieu d'y insister ici; nous en parlerons dans le Chapitre IV.

Le problème actuel est, comme nous l'avons dit, un cas particulier du précédent puisque, si l'on savait calculer la somme de la série numérique obtenue en donnant à la variable (ou aux variables), dans la série de fonctions, une valeur particulière quelconque, on aurait la connaissance complète des valeurs numériques de la fonction représentée par la série. Cette fonction serait donc connue, au moins théoriquement, et son étude rendue possible.

Mais on conçoit qu'il puisse être le plus souvent avantageux d'étudier cette fonction directement, sans passer par l'intermédiaire de ses valeurs numériques, et c'est pourquoi nous avons distingué ce second problème du premier.

Le cas particulier de ce second problème qui paraît être de beaucoup le plus important, dans l'état actuel de l'Analyse, est celui qui est relatif aux séries de puissances toujours divergentes. Nous nous en occuperons à diverses reprises dans le courant de cet Ouvrage.

Remarquons simplement ici que ces séries se présentent naturellement, comme intégrales vérifiant formellement des équations différentielles, et qu'il est par conséquent tout indiqué de chercher à déterminer, à l'aide de ces séries, les fonctions intégrales.

Il est clair, d'ailleurs, sans qu'il soit besoin d'insister sur ce point, que les règles de sommation de ces séries de fonctions devront satisfaire aux lois fondamentales que nous avons reconnu être nécessaires pour les règles de sommation des séries numériques. En particulier, pour les séries de puissances, la multiplication s'effectue d'après des règles évidentes : elle devra donner pour résultat une série dont la somme sera le produit des sommes des séries facteurs.

Terminons en indiquant brièvement le plan de ce Livre.

Le Chapitre I est consacré aux séries asymptotiques, dont la théorie est dominée par les travaux de M. Poincaré. Cette théorie permet de faire correspondre, dans des cas déterminés, à une série divergente un nombre *connu seulement avec une certaine approximation*.

Au point de vue des applications aux problèmes pratiques, et en particulier à ceux de la Mécanique céleste, cette solution est pleinement satisfaisante, du moment que l'approximation est assez grande. Mais, au point de vue théorique, cette méthode ne permet point de déterminer *exactement* la fonction qui correspond à une série analytique; nous verrons, en effet, d'après M. Poincaré, qu'à chaque série asymptotique correspondent une infinité de fonctions distinctes.

Les séries asymptotiques peuvent cependant rendre de grands services pour l'étude des intégrales des équations différentielles indépendamment de leurs applications au calcul numérique. En effet, en général, parmi l'infinité de fonctions que représente la série, une seule vérifie l'équation différentielle : à la série correspond donc, lorsqu'on lui adjoint l'équation différentielle, une fonction déterminée, et l'on conçoit que la considération simultanée de la série et de l'équation permette d'étudier cette fonction.

Le Chapitre II est consacré à l'étude des rapports entre les séries divergentes et les fractions continues; les travaux fondamentaux de Stieltjes sur la question y occupent la plus large place. A la fin de ce Chapitre j'indique une généralisation récente des résultats de Stieltjes (1), généralisation faite en vue de l'applica-

(1) *Voir* Borel, *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale,* 1899, p. 113 et suiv.).

tion possible des règles du calcul aux séries divergentes considérées.

La portée des résultats de Stieltjes est ainsi notablement étendue et leur application à la théorie des équations différentielles est rendue possible.

Le Chapitre III est consacré à l'exposition d'une généralisation de la notion de somme que j'ai indiquée il y a quelques années; dans le Chapitre IV, j'étudie les rapports de cette théorie avec celle du prolongement analytique et j'indique quelques résultats obtenus récemment par divers géomètres, dont les travaux ont été inspirés par la théorie des séries divergentes sommables et qui, à ce titre, trouvent naturellement leur place ici.

Enfin, dans le Chapitre V, après avoir exposé un très beau théorème que M. Mittag-Leffler a obtenu récemment en cherchant à généraliser certains résultats des Chapitres III et IV, je montre comment les idées exposées sur les séries divergentes permettent d'aboutir, dans cette voie, à des résultats bien plus étendus, et j'étudie les rapports de cette théorie nouvelle avec les autres théories des séries divergentes.

CHAPITRE I.

LES SÉRIES ASYMPTOTIQUES.

Cauchy et la série de Stirling.

Comme nous l'avons vu, les premières recherches sur les séries asymptotiques sont dues à Cauchy [1], et sont surtout relatives à la série de Stirling. Mais la théorie générale de ces séries n'a été établie que récemment, par les travaux de M. Poincaré.

La série de Stirling, la première série divergente employée pratiquement, sert à calculer la fonction $\Gamma(z)$ quand z est très grand. La fonction $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\,dx.$$

En intégrant par parties on obtient la relation

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

d'où l'on déduit que, pour les valeurs entières de n, on a

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Lorsque n est très grand, les valeurs de $n!$ sont très pénibles à calculer, et cependant il est important, notamment dans bien des questions de calcul des probabilités, d'en connaître une valeur approchée.

Nous partirons de la formule suivante que l'on démontre dans les cours d'Analyse (*voir*, par exemple, Jordan, 2[e] édition, t. II, p. 180) :

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \varpi(z)$$

(1) Cauchy, *Comptes Rendus*, t. XVII, p. 370 (28 août 1843). *Œuvres*, série I, t. VIII, p. 18.

avec

$$\varpi(z) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) e^{-zx} \frac{dx}{x}.$$

Le calcul de la fonction $\Gamma(z)$ est ainsi ramené au calcul avec approximation de la fonction $\varpi(z)$.

Nous supposerons z réel et positif, ce cas étant seul intéressant dans les applications. L'intégrale prise à partir de o a un sens. On a en effet :

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{4!} + \ldots\right)}$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2} + \ldots\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \mathrm{A}x + \ldots.$$

Donc

$$\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x} = (\mathrm{A} + \ldots)\, dx,$$

et l'on voit que le coefficient de dx est fini pour $x = 0$. Il en résulte immédiatement que la fonction $\varpi(z)$ tend vers zéro si z croît indéfiniment.

Pour avoir une première approximation, remarquons que l'on a

$$\int_0^\infty e^{-zx}\, dx = \left(-\frac{e^{-zx}}{z} \right)_0^\infty = \frac{1}{z},$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$\left| \int_0^\infty f(x) e^{-zx}\, dx \right| < \frac{\mathrm{M}}{z},$$

M étant le maximum de la valeur absolue de la fonction $f(x)$ supposée constamment finie dans le champ d'intégration.

Cette formule pourra suffire dans certains cas; mais on ne connaîtra pas l'erreur commise.

L'intégrale $\varpi(z)$ tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment, il est naturel de la développer suivant les puissances de $\frac{1}{z}$. Ce développement introduit les nombres de Bernoulli. On a

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{1}{x} = \frac{i}{2} \cot \frac{ix}{2} - \frac{1}{x}.$$

En se servant de la formule

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2},$$

pour

$$z = \frac{ix}{2\pi},$$

on obtient

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 4n^2\pi^2},$$

et par suite

$$\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4n^2\pi^2}$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n^2\pi^2} - \frac{x^2}{(4n^2\pi^2)^2} + \frac{x^4}{(4n^2\pi^2)^3} - \ldots\right]$$

D'ailleurs

$$2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2\pi^2)^p} = \frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{B_p}{(2p)!}$$

en posant

$$B_p = 2\frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p}}\left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \ldots\right).$$

Les nombres B_p ainsi définis sont les nombres de Bernoulli. Ils sont rationnels, bien que cette propriété n'apparaisse pas sous la forme précédente; mais elle est évidente, si l'on remarque que, pour développer en série $\cot z$, il suffit de diviser l'un par l'autre les développements de $\cos z$ et $\sin z$, lesquels sont tous deux à coefficients rationnels.

Nous aurons alors

$$\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{x} = \frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \frac{B_3}{6!}x^4 - \ldots$$

et l'intégrale $\varpi(z)$ peut s'écrire

$$\varpi(z) = \int_0^{\infty}\left(\frac{B_1}{2!} - \frac{B_2}{4!}x^2 + \frac{B_3}{6!}x^4 - \ldots\right)e^{-zx}\,dx.$$

Nous aurons donc à calculer des intégrales de la forme $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-zx}\,dx$ qui se ramènent immédiatement aux fonctions Γ

en posant $zx = y$, ce qui ne change pas les limites, puisque z est réel et positif. On obtient

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-zx}\,dx = \frac{1}{z^{2n+1}} \int_0^\infty y^{2n} e^{-y}\,dy = \frac{\Gamma(2n+1)}{z^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{z^{2n+1}}.$$

On trouve donc

$$\varpi(z) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{z} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{z^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{z^5} - \ldots.$$

Or les nombres de Bernoulli de rang élevé augmentent rapidement avec leur indice, car on a

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2} \frac{\left(1 + \frac{1}{2^{2p+2}} + \frac{1}{3^{2p+2}} + \ldots\right)}{\left(1 + \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} + \ldots\right)},$$

d'où

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} > \frac{(2p+1)(2p+2)}{4\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots} > A(2p+1)(2p+2),$$

A étant une constante.

Donc ce rapport croît indéfiniment avec p.

Le rapport d'un terme au précédent dans la série $\varpi(z)$ a pour valeur absolue

$$\frac{B_{p+1}}{B_p} \frac{(2p-1)2p}{(2p+1)(2p+2)} \frac{1}{z^2}$$

et, par suite, quel que soit z, il croît aussi indéfiniment en même temps que p.

Le développement que nous avons trouvé pour $\varpi(z)$ est donc divergent. Les opérations que nous avons faites, présentées sous cette forme, ne sont par conséquent pas légitimes. Néanmoins Cauchy a montré que, sans qu'il soit besoin de faire aucun autre calcul, on peut légitimement employer le développement trouvé pour le calcul approximatif de $\varpi(z)$.

Nous avions à calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\sum_1^\infty \frac{2}{x^2 + 4n^2\pi^2}\right) e^{-zx}\,dx.$$

Or Cauchy a fait la remarque suivante : Si l'on désigne par a et y

des nombres positifs et que l'on considère le quotient

$$\frac{1}{a+y}=\frac{1}{a}-\frac{y}{a^2}+\frac{y^2}{a^3}-\ldots+(-1)^n\frac{y^n}{a^{n+1}}+(-1)^{n+1}\frac{y^{n+1}}{a^{n+1}(y+a)},$$

la progression géométrique obtenue peut être convergente ou divergente, mais la valeur absolue du reste est toujours plus petite, soit que le dernier terme calculé, soit que le premier négligé. Elle est d'ailleurs de même signe que le premier terme négligé.

Cette propriété, vraie pour des progressions géométriques, le sera encore pour des sommes de progressions géométriques, de raison négative.

Nous avons obtenu le développement

$$\sum_1^\infty \frac{2}{4n^2\pi^2+x^2}=\frac{B_1}{2!}-\frac{B_2 x^2}{4!}+\frac{B_3}{6!}x^4-\ldots$$

comme une somme de telles progressions. Donc, en nous arrêtant au terme $(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}x^{2p-2}$, l'erreur sera $\theta\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}x^{2p}$, θ étant compris entre 0 et 1. Dans l'intégration qui donne $\varpi(z)$ le terme complémentaire précédent donnera comme coefficient de $\frac{B_{p+1}}{(2p+2)!}$

$$\int_0^\infty \theta x^{2p}e^{-zx}\,dx=\theta_1\int_0^\infty x^{2p}e^{-zx}\,dx=\theta_1\frac{\Gamma(2p+1)}{z^{2p+1}}=\theta_1\frac{(2p)!}{z^{2p+1}},$$

c'est-à-dire que la propriété fondamentale des progressions : *l'erreur est plus petite que le premier terme négligé*, subsiste si l'on multiplie par e^{-zx} et si l'on intègre. Elle appartient donc à la série de Stirling, et l'on a

$$\varpi(z)=\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{z}-\frac{B_2}{3.4}\frac{1}{z^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\frac{1}{z^{2n-1}}$$
$$+\theta(-1)^n\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}\frac{1}{z^{2n+1}}\qquad(0<\theta<1).$$

Il est donc possible de se servir de cette série divergente pour le calcul de $\varpi(z)$ et par suite de $\log\Gamma(z)$, en ayant soin de s'arrêter au terme le plus petit. Or il est aisé de voir que ce plus petit terme décroît très rapidement lorsque z augmente, de sorte que l'on a une approximation très considérable.

On voit que la méthode de Cauchy ne s'applique pas seulement à la série de Stirling, mais s'étend immédiatement à une classe étendue de séries analogues.

La théorie de M. Poincaré.

L'idée de chercher à construire une théorie générale des séries asymptotiques paraît être venue simultanément à Stieltjes et à M. Poincaré. Stieltjes leur donna le nom de *séries semi-convergentes*. Nous n'adopterons pas cette dénomination, qui prête à une ambiguïté [1], mais celle de *séries asymptotiques* due à M. Poincaré et qui est maintenant consacrée par l'usage. La théorie de M. Poincaré a d'ailleurs bien plus de portée que celle de Stieltjes.

Néanmoins les travaux de Stieltjes sont intéressants, et nous allons en dire quelques mots, avant de passer à l'étude de la théorie de M. Poincaré. Stieltjes suppose que l'on part d'une fonction déterminée, que l'on veut étudier pour les valeurs très grandes de la variable.

Considérons une fonction $F(a)$ d'une variable positive a. Supposons que lorsque a augmente indéfiniment cette fonction ait une limite

$$\lim_{a=\infty} F(a) = C_0,$$

On peut dire que C_0 donne une approximation de $F(a)$ pour une valeur très grande de a. Cherchons si l'on peut trouver une approximation plus grande. $F(a) - C_0$ tend vers zéro. Mais il se peut que le produit par a de cette quantité ait une limite

$$\lim_{a=\infty} a[F(a) - C_0] = C_1,$$

ou

$$\lim_{a=\infty} a\left[F(a) - C_0 - \frac{C_1}{a}\right] = 0.$$

Il se peut encore que l'on ait

$$\lim_{a=\infty} a^2\left[F(a) - C_0 - \frac{C_1}{a}\right] = C_2,$$

et ainsi de suite.

---

[1] On appelle souvent *semi-convergentes* les séries *non absolument* convergentes.

On est conduit à écrire

$$F(a) = C_0 + \frac{C_1}{a} + \frac{C_2}{a^2} + \ldots.$$

Il pourra arriver que le développement ainsi trouvé soit divergent. On peut alors se demander si ce développement ne peut pas tout de même être utile pour le calcul de la fonction $F(a)$. On écrira

$$F(a) = C_0 + \frac{C_1}{a} + \ldots + \frac{C_n}{a^n} + R_n$$

et la question se posera d'étudier R_n; selon le résultat de cette étude, on se servira ou non de la série. On n'aura pas à proprement parler à étudier une série divergente, mais une certaine fonction R_n.

Stieltjes a fait observer qu'on avait surtout étudié auparavant les séries pour lesquelles les signes sont alternés et qu'il appelle *séries de première espèce,* donnant le nom de *séries de seconde espèce* à celles dont tous les termes ont le même signe.

En général, les *séries de première espèce* sont telles que le reste R_n est inférieur au dernier terme calculé ou au premier terme négligé. On peut calculer ces séries sans scrupule aussi loin qu'elles paraissent converger.

Considérons maintenant une *série de seconde espèce,* par exemple

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1.2}{a^3} + \ldots + \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{a^n} + R_n.$$

Si a est déterminé, ainsi que $F(a)$, le reste R_n, quand n augmentera, sera d'abord positif, puis négatif et décroîtra jusqu'à $-\infty$.

Ce qui est important, c'est la détermination de la valeur de n pour laquelle R_n se rapprochera le plus possible de zéro. La série précédente se rencontre dans l'étude du logarithme intégral qui est défini par la formule

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log x}.$$

C'est une transcendante fort intéressante qu'on rencontre dans beaucoup de problèmes. Voyons le sens qu'il faut attribuer à cette formule.

Si $x < 1$, l'intégrale a un sens. Pour $x = 1$, l'intégrale deviendrait infinie. Si $x > 1$, on remplace l'intégrale par ce que Cauchy appelait la *valeur principale,* c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\right).$$

On constate aisément que cette limite existe lorsque ε tend vers zéro [1].

Si l'on remplace x par e^a dans le logarithme intégral, on trouve le développement divergent qui précède

$$\operatorname{li}(e^a) = e^a\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1.2}{a^3}+\frac{1.2\ldots(n-1)}{a^n}+R_n\right].$$

On peut obtenir aussi, pour le logarithme intégral, un développement convergent. Mais Stieltjes a montré que le développement divergent donne des résultats bien meilleurs pour le calcul [2].

La méthode de M. Poincaré est plus générale. Elle permet d'étudier les intégrales d'un grand nombre d'équations différentielles [3].

Son principe consiste, après avoir défini la correspondance entre une fonction et une série asymptotique, à constater que cette correspondance se conserve dans la plupart des opérations simples.

Considérons une fonction $J(x)$ et le développement

$$C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\ldots.$$

On dira que ce développement, qui peut être *divergent,* repré-

---

(1) D'une manière plus générale, on sait que, si $f(c)$ est infini, on définit l'intégrale comme il suit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)\,dx\right],$$

ε et ε' tendant vers zéro indépendamment l'un de l'autre.

Cauchy a introduit la *valeur principale* en faisant $\varepsilon=\varepsilon'$, et il se peut que la valeur principale existe alors que la valeur générale n'existe pas.

(2) *Voir* STIELTJES, *Recherches sur quelques séries semi-convergentes* (*Annales de l'École Normale,* 1886).

(3) *Voir* POINCARÉ, *Sur les intégrales singulières des équations différentielles* (*Acta mathematica,* t. VIII).

sente *asymptotiquement* la fonction si la différence

$$J(x) - \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_n}{x^n}\right)$$

est, lorsque x croît indéfiniment, d'un ordre de grandeur inférieur à $\frac{1}{x^n}$, c'est-à-dire si le produit de cette différence par x^n tend vers zéro.

En appelant ε_n ce produit, on aura

$$\lim_{x=\infty} x^n \left[J(x) - \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_n}{x^n}\right)\right] = \lim_{x=\infty} \varepsilon_n = 0$$

et

$$J(x) = C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{C_n + \varepsilon_n}{x^n}.$$

Si l'on considérait la courbe $y = J(x)$ et les courbes $y = S_n(x)$ obtenues en prenant les sommes successives des termes de la série, ces courbes seraient asymptotes à la première, et le contact à l'infini deviendrait de plus en plus intime à mesure que n croîtrait.

Lorsqu'on se donne une fonction $J(x)$, il est facile de savoir s'il y a un développement la représentant asymptotiquement. Il suffit, en effet, pour le déterminer d'appliquer la méthode que nous avons exposée d'après Stieltjes. Si ce développement existe, il est d'ailleurs unique. Cette représentation a un inconvénient : c'est qu'une même série peut représenter asymptotiquement plusieurs fonctions.

Considérons en effet, par exemple, la fonction e^{-x}.

On a

$$\lim_{x=\infty} e^{-x} = 0 = C_0,$$

$$\lim_{x=\infty} x(e^{-x} - C_0) = 0 = C_1,$$

$$\lim_{x=\infty} x^2\left(e^{-x} - C_0 - \frac{C_1}{x}\right) = 0 = C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La fonction e^{-x} est donc représentée asymptotiquement par un développement identiquement nul.

Si donc une fonction $J(x)$ est représentée par

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots$$

il est clair que la fonction $J(x) + e^{-x}$ sera représentée par le *même* développement. Ce n'est qu'en l'assujettissant à d'autres conditions qu'on déterminera la fonction représentée par une telle série. Par exemple, si l'on considère une équation différentielle, le fait que la fonction cherchée est une intégrale de l'équation suffira souvent pour que son développement asymptotique la détermine.

Maintenant que nous avons défini la représentation asymptotique des fonctions, nous allons étudier ce que devient cette représentation quand on effectue sur les fonctions des opérations simples.

Tout d'abord on voit immédiatement que la représentation asymptotique est conservée par l'*addition* et la *soustraction* [1].

Si l'on a

$$J(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_n + \varepsilon_n}{x^n},$$

$$J'(x) = c'_0 + \frac{c'_1}{x} + \ldots + \frac{c'_n + \varepsilon'_n}{x^n},$$

ε_n et ε'_n tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment, on aura

$$J(x) + J'(x) = (c_0 + c'_0) + \frac{(c_1 + c'_1)}{x} + \ldots + \frac{(c_n + c'_n) + (\varepsilon_n + \varepsilon'_n)}{x^n},$$

$\varepsilon_n + \varepsilon'_n$ tendant encore vers zéro lorsque x croît indéfiniment.

Effectuons maintenant la *multiplication* des deux fonctions J et J'. On aura

$$JJ' = c_0 c'_0 + \frac{c_0 c'_1 + c_1 c'_0}{x} + \ldots + \frac{c_0 c'_n + \ldots + c^n c'_0}{x_n} + \frac{c_0 \varepsilon'_n + c'_0 \varepsilon_n}{x^n}$$
$$+ \frac{c_1(c'_n + \varepsilon'_n) + c_2 c'_{n-1} + \ldots + (c_n + \varepsilon_n) c'_1}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{(c_n + \varepsilon_n)(c'_n + \varepsilon'_n)}{x^{2n}}$$

ou

$$JJ' = c_0 c'_0 + \frac{c_0 c'_1 + c_1 c'_0}{x} + \ldots + \frac{c_0 c'_n + \ldots + c_n c'_0}{x^n} + \frac{\eta}{x^n},$$

η tendant visiblement vers zéro quand x croît indéfiniment.

Si donc deux fonctions sont telles que chacune d'elles est représentée par une série asymptotique, il en est de même de leur produit et la série asymptotique qui le représente est le produit

---

(1) Nous avons, en fait, déjà utilisé cette propriété pour la somme $J(x) + e^{-x}$.

des deux séries données. Nous dirons plus brièvement qu'*on peut multiplier deux séries asymptotiques.* Comme corollaire, on peut élever à une puissance quelconque une série asymptotique.

On pourra donc aussi calculer un polynome dont les divers termes seront les puissances d'une série asymptotique

$$F(J) = A_0 + A_1 J + \ldots + A_p J^p.$$

On peut aller plus loin, et énoncer un résultat très important : *on peut remplacer le polynome précédent par une série convergente,* à condition toutefois de prendre certaines précautions.

Soit

$$f(J) = A_0 + A_1 J + \ldots + A_p J^p + \ldots$$

une série convergente dont le rayon de convergence ρ soit supérieur à $|c_0|$. $J(x)$ tendant vers c_0 lorsque x croît indéfiniment, pour x assez grand la série convergera par suite de la condition $\rho > |c_0|$. $f(J)$ définit une certaine fonction de x, $F(x)$. Je dis que cette fonction est susceptible d'une représentation asymptotique que l'on obtiendra en remplaçant, dans la série f, J par la série asymptotique correspondante et en effectuant les calculs. On a

$$\lim_{x=\infty} F(x) = A_0 + A_1 c_0 + \ldots + A_p c_0^p + \ldots = C_0,$$

$$F(x) - C_0 = A_1(J - c_0) + \ldots + A_p(J^p - c_0^p) + \ldots.$$

Calculons $\lim x[F(x) - C_0]$. Nous savons que $x(J^p - c_0^p)$ a une limite bien déterminée. Il suffit, pour avoir cette limite, d'élever à la puissance p le développement asymptotique de $J(x)$

$$J^p(x) = c_0^p + \frac{p c_0^{p-1} c_1}{x} + \ldots.$$

On a donc

$$\lim x(J^p - c_0^p) = p c_0^{p-1} c_1.$$

Nous connaîtrons donc la limite C_1 de $x[F(x) - C_0]$.

On obtient

$$C_1 = c_1(A_1 + 2A_2 c_0 + \ldots + p A_p c_0^{p-1} + \ldots),$$

la série étant visiblement convergente, d'après l'hypothèse faite sur le rayon de convergence de $f(J)$.

En continuant ainsi nous verrions qu'il suffit de remplacer partout $J(x)$ par son développement asymptotique pour avoir celui de $F(x)$.

Nous aurions pu éviter tout calcul en faisant la remarque suivante : Le développement en série asymptotique est unique; si d'ailleurs il est convergent il suffit pour l'obtenir de faire la substitution indiquée. Il doit donc en être de même quand le développement est divergent.

Au point de vue de la convergence la seule question qui pourrait se poser est celle de la convergence des développements successifs définissant C_0, C_1, ... Or, l'emploi de la formule de Taylor montre immédiatement que ces développements s'expriment linéairement au moyen des séries $f'(c_0)$, $f''(c_0)$, ... qui sont toutes convergentes, par hypothèse; dans l'expression de chacun des coefficients c_p, il ne figure d'ailleurs qu'un nombre limité de ces séries (les p premières).

Passons au cas de la division. $J(x)$ étant représentée comme précédemment, considérons $\frac{1}{J(x)}$. Nous pourrons l'écrire

$$\frac{1}{J(x)} = \frac{1}{c_0\left[1 + \frac{c_1}{c_0 x} + \frac{c_2}{c_0 x^2} + \ldots\right]},$$

ou, en posant

$$\Phi(x) = \frac{c_1}{c_0 x} + \frac{c_2}{c_0 x^2} \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{J(x)} = \frac{1}{c_0}\left[1 - \Phi + \Phi^2 - \Phi^3 + \ldots\right].$$

Cette série est convergente si $|\Phi| < 1$. Mais Φ tend vers zéro lorsque x devient infini; la condition $\rho > |c_0|$ est donc remplie, puisque, pour Φ, c_0 est nul. On peut donc, avec la seule restriction de ne pas diviser par une quantité nulle, c'est-à-dire en supposant $c_0 \neq 0$, diviser l'unité par $J(x)$ et l'on obtiendra comme quotient le développement asymptotique de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

On peut par suite diviser l'une par l'autre deux séries asymptotiques pourvu que le premier terme c_0 de la série diviseur ne soit pas nul.

Nous allons voir maintenant qu'il est permis d'intégrer une série asymptotique.

Supposons que l'on ait asymptotiquement

$$J(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_m}{x^m} + \ldots.$$

Je dis que l'on aura de même

$$\int_x^{\infty} \left[J(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} \right] dx = \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \ldots + \frac{c_m}{(m-1)x^{m-1}} + \ldots.$$

Nous faisons passer dans le premier membre les termes c_0 et $\frac{c_1}{x}$ afin de ne pas introduire des intégrales dépourvues de sens. Nous pouvons écrire

$$J(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_m + \varepsilon_m}{z^m}.$$

En intégrant nous aurons

$$\int_x^{X} \left[J(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right] dz = \int_x^{X} \left(\frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_m}{z^m} \right) dx + \int_x^{X} \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz.$$

On sait que ε_m tend vers zéro lorsque z croît indéfiniment.

Donc le second membre tend vers une limite quand X croît indéfiniment. Il en est de même du premier et l'on peut écrire

$$\int_x^{\infty} \left[J(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right] dz = \frac{c_2}{x} + \frac{1}{2}\frac{c_3}{x^2} + \ldots + \frac{1}{m-1}\frac{c_m}{x^{m-1}} + \frac{\eta_m}{x^{m-1}},$$

η_m tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment. En effet,

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz \right| < \mu_m \int_x^{\infty} \frac{dz}{z^m},$$

μ_m étant égal à la plus grande des valeurs que prend ε_m lorsque z est compris entre x et $+\infty$.

Donc

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{z^m} dz \right| = \frac{\eta_m}{x^{m-1}} < \frac{\mu_m}{m-1} \frac{1}{x^{m-1}},$$

ce qu'on peut écrire

$$\eta_m = \theta \frac{\mu_m}{m-1} \qquad \text{avec} \qquad |\theta| < 1.$$

η_m tend donc bien vers zéro. Par conséquent, l'intégrale

$$\int_x^\infty \left[J(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right] dz$$

a bien pour développement asymptotique celui que nous avons indiqué.

Nous écrirons cette intégrale

$$\int_{x_0}^\infty \left[J(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right] dz - \int_{x_0}^{x} \left[J(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right] dz.$$

La première intégrale est une constante que nous appellerons C_0. Nous aurons alors

$$\int_x^\infty \left[J(z) - c_0 - \frac{c_1}{z} \right] dz = C_0 - \int_{x_0}^{x} J(z)\,dz + c_0(x - x_0) + c_1 \log \frac{x}{x_0}.$$

Nous pouvons maintenant donner l'expression de $\int_{x_0}^{x} J(z)\,dz$. On a

$$\int_{x_0}^{x} J(z)\,dz = c_0 x + c_1 \log x + C - \frac{c_2}{x} - \frac{1}{2}\frac{c_3}{x^2} - \ldots,$$

ce qui montre bien qu'on peut intégrer une série asymptotique. On déterminera C en donnant à x une valeur particulière. Le développement asymptotique ne commence pas ici par une constante, mais par deux termes qui augmentent indéfiniment avec x

$$c_0 x + c_1 \log x.$$

C'est là une généralisation, due à M. Poincaré, de la définition du développement asymptotique, généralisation qu'on est naturellement conduit à introduire dans la théorie et que nous avons déjà rencontrée pour la série de Stirling.

D'une manière générale, dire que l'on a *asymptotiquement*

$$\Phi(x) = f(x) + g(x)\left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots \right)$$

signifie que l'on a

$$\frac{\Phi(x) - f(x)}{g(x)} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots$$

asymptotiquement.

Ceci ne concorde pas avec la première définition que nous avions donnée, d'après laquelle

$$x^m\left[F(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} - \ldots\right]$$

tend vers zéro, mais avec la seconde, qui fait intervenir la quantité ε_m tendant vers zéro.

Il nous reste à examiner une dernière opération simple : la différentiation. Celle-là n'est pas applicable aux séries asymptotiques, du moins d'une façon générale. Et, en réalité, lorsqu'elle est légitime, elle n'est qu'une application du théorème sur l'intégration. Tout ce qu'on peut dire, c'est que, si l'on considère une série asymptotique représentant $F(x)$ et si l'on considère la fonction $F'(x)$, si cette dernière fonction a un développement asymptotique, ce développement est nécessairement celui que l'on obtient en dérivant le développement de $F(x)$, car l'intégration du développement de $F'(x)$ doit donner celui de $F(x)$. Mais la fonction $F'(x)$ peut ne pas avoir de développement asymptotique.

Considérons, par exemple, la fonction

$$e^{-x}\sin(e^{x^2}).$$

Le produit de cette fonction par x^m tend vers zéro pour x infini, quel que soit m. Le développement asymptotique est donc identiquement nul; il en est, par suite, de même de la dérivée de ce développement. Or, la dérivée de la fonction est

$$e^{-x}e^{x^2}2x\cos(e^{x^2}) - e^{-x}\sin(e^{x^2})$$

et le premier terme ne tend pas vers zéro lorsque x devient infini. Cette dérivée n'est donc pas susceptible d'un développement asymptotique.

Avant d'appliquer les règles du calcul des séries asymptotiques que nous venons de donner, nous ferons encore quelques remarques relatives à ces séries.

Si l'on fait le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, on aura une représentation asymptotique de la fonction au voisinage de l'origine.

On aura

$$\begin{aligned}F(x) = \Phi(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_m t^m + \ldots\\ &= a_0 + a_1 t + \ldots + (a_m + \varepsilon_m) t^m,\end{aligned}$$

ε_m tendant vers zéro en même temps que t.

Si la fonction et ses dérivées tendent vers des limites pour $t = 0$, le développement précédent n'est autre que la série de Taylor.

Nous avons supposé que x croissait indéfiniment, ou, ce qui revient au même, que t tendait vers zéro, par valeurs réelles (positives, par exemple). Si t, au lieu de tendre vers zéro avec un argument nul, le faisait avec un argument déterminé α, il suffirait d'effectuer le changement de variable $te^{i\alpha} = t'$ pour revenir au cas étudié.

Mais si l'argument varie, une même série asymptotique peut représenter deux fonctions différentes, comme aussi elle peut ne représenter aucune fonction pour certaines valeurs de l'argument. On aura alors des arguments singuliers qu'on ne pourra franchir sans précaution. Et même, si la série est divergente, elle ne peut certainement pas représenter la même fonction pour toute valeur de l'argument ou du moins il ne peut pas exister des constantes c_0, c_1, c_2, ..., telles que, par exemple, le produit

$$x^2\left(\mathrm{J} - c_0 - \frac{c_1}{x} - \frac{c_2}{x^2}\right)$$

tende *uniformément* vers zéro lorsque x croît indéfiniment, à moins que $\mathrm{J}(x)$ ne soit une fonction holomorphe de $\frac{1}{x}$ auquel cas la série correspondante est convergente.

Dans l'étude de la représentation asymptotique suivant les divers arguments, on devra faire varier α entre 0 et 2π si la fonction est uniforme, et, dans le cas général, entre $-\infty$ et $+\infty$.

Applications aux équations différentielles.

On sait qu'il existe des équations différentielles telles que, si l'on cherche à déterminer une intégrale par des conditions initiales, au voisinage de certains points, on obtient une série divergente.

Il en est ainsi de l'équation

$$x^2\frac{dy}{dx} = ax + by.$$

Supposons pour $x = 0$, $y_0 = 0$ et cherchons à calculer les valeurs des dérivées successives de y.

En dérivant, on obtient :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + a + b\frac{dy}{dx}.$$

Si l'on suppose que $\frac{d^2y}{dx^2}$ n'est pas infini, on aura pour $x = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{a}{b}.$$

En dérivant une fois de plus on aurait $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = -\frac{2a}{b^2}$.

Si enfin nous dérivons n fois, nous obtiendrons

$$x^2\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2nx\frac{d^ny}{dx^n} + n(n-1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + b\frac{d^ny}{dx^n},$$

d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 = -\frac{n(n-1)}{b}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 = \pm\frac{n!(n-1)!a}{b^n}.$$

Si nous voulons écrire la série

$$y = y_0 + \frac{x}{1}y'_0 + \frac{x^2}{1.2}y''_0 + \ldots,$$

nous sommes amenés à écrire la série divergente

$$-\frac{y}{a} = \frac{x}{b} - \frac{x^2}{b^2} + 1.2\frac{x^3}{b^3} - \ldots \pm 1.2.3\ldots(n-1)\frac{x^n}{b^n} \mp \ldots.$$

D'ailleurs, le développement divergent que l'on obtient ainsi vérifie *formellement* l'équation différentielle, c'est-à-dire que, si on le substitue à y dans l'équation et si l'on applique les règles ordinaires du calcul comme si la série était convergente, on trouve une identité.

Si l'on considère maintenant l'équation

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^n) = 0,$$

la méthode de Cauchy perfectionnée par Briot et Bouquet consiste à calculer les dérivées de y pour $x = 0$, en différentiant totalement par rapport à x.

Dans le cas où les dérivées obtenues donnent pour y un développement convergent,

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1} x + \frac{y''_0}{1.2} x^2 + \ldots,$$

on fait le raisonnement suivant :

Si l'on remplace y par cette expression dans F, et si F est une fonction analytique, on obtiendra une fonction analytique de x

$$F = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots.$$

Mais par hypothèse y et ses dérivées sont choisies telles que F et ses dérivées soient nulles pour $x = 0$.

Ces dérivées pour $x = 0$ étant A_0, A_1, A_2, ..., on en conclut que le développement de F est identiquement nul. Par suite la fonction y ainsi définie est une intégrale de l'équation.

Dans le cas où la série trouvée pour y est divergente, on peut encore remplacer y par cette série et appliquer les règles ordinaires du calcul.

Les coefficients A_0, A_1, ..., s'exprimeront exactement de la même manière que lorsque la série y est convergente, puisque les règles de calcul sont les mêmes. Donc le résultat obtenu sera identiquement nul et le développement vérifiera *formellement* l'équation différentielle.

Ce résultat était connu depuis longtemps. M. Poincaré, le premier, a montré qu'on en pouvait tirer profit pour l'étude des intégrales. Depuis, la méthode de M. Poincaré a été utilisée par de nombreux géomètres, et notamment par M. Horn et M. Kneser.

Supposons que l'équation différentielle proposée ait une intégrale y susceptible d'un développement asymptotique

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots.$$

Supposons en outre que les dérivées de y jusqu'à l'ordre n aient un développement asymptotique.

Je dis que, dans ces conditions, le développement précédent vérifie formellement l'équation différentielle; de sorte que nous devrons rechercher les développements asymptotiques des intégrales parmi les développements asymptotiques vérifiant formellement l'équation.

Si, en effet, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ sont représentées comme nous l'avons supposé, et si l'on remplace formellement dans

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$$

$y, y', \ldots, y^{(n)}$ par leurs développements, qui se déduisent de celui de y par dérivation, on obtiendra, en effectuant les calculs par les règles habituelles, le développement asymptotique de la fonction $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$. Or ce développement est identiquement nul. Le développement asymptotique de y vérifie donc formellement l'équation $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Ainsi, s'il existe des intégrales susceptibles d'être représentées par des séries asymptotiques, ces séries vérifieront formellement l'équation différentielle. Mais la réciproque de cette proposition n'est pas nécessairement vraie dans tous les cas, car, si un développement asymptotique et ses dérivées donnent pour la fonction $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ un développement asymptotique nul, il ne s'ensuit pas que cette fonction F est identiquement nulle. Il faut s'assurer directement qu'il y a des intégrales susceptibles d'une représentation asymptotique.

M. Poincaré a montré l'existence de telles intégrales pour les équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes. Dans ce cas on peut être assuré que les développements asymptotiques représentent des intégrales, car on trouve autant de développements qu'il y a d'intégrales distinctes.

Cette application des séries asymptotiques est jusqu'ici l'une des plus importantes et des plus intéressantes; nous ne l'exposerons cependant pas ici, car, indépendamment des Mémoires de M. Poincaré, elle se trouve exposée dans le Traité classique de M. Picard [1]. Nous ne parlerons pas non plus des applications à la Mécanique céleste, exposées par M. Poincaré dans son Ouvrage bien connu : *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* Nous préférons attirer l'attention sur des applications de la théorie plus récentes et moins connues. Ces applications sont relatives à des équations linéaires dont les coefficients ne sont pas des polynomes. Considérons [2] l'équation linéaire du second ordre sui-

---

[1] V. POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. VIII. — PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III.

[2] KNESER, *Journal de Crelle*, t. 116.

vante, dont les coefficients sont ordonnés en $\frac{1}{x}$

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right)y' + \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots\right)y = 0.$$

Nous supposerons que les séries qui y figurent sont convergentes lorsque x est assez grand. Proposons-nous d'étudier les intégrales de cette équation au voisinage du point ∞. Ce point est singulier, car, si l'on pose $x = \frac{1}{t}$, on obtient une équation de la forme

$$t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + t^2 \frac{dy}{dt}(a'_0 + a'_1 t + \ldots) + y(b_0 + b_1 t + \ldots) = 0,$$

pour laquelle le point $t = 0$ est visiblement un point singulier au moins si les coefficients numériques a et b sont quelconques.

Une première simplification pour l'équation primitive consiste à faire disparaître le terme en y'.

Prenons l'équation $y'' + Py' + Qy = 0$ et faisons la substitution $y = zs$. On obtient la nouvelle équation

$$z'' + z'\left(P + 2\frac{s'}{s}\right) + z\left(Q + P\frac{s'}{s} + \frac{s''}{s}\right) = 0.$$

Il suffit alors de déterminer s par la condition

$$P + 2\frac{s'}{s} = 0$$

qui donne

$$s = e^{-\int \frac{P}{2} dx}$$

pour avoir l'équation en z

$$z'' + z\left(Q - \frac{P'}{2} - \frac{P^2}{4}\right) = 0,$$

qui n'a pas de terme en z'.

Nous pourrons donc nous borner à étudier l'équation

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right)y = 0.$$

Nous ferons encore certaines hypothèses restrictives : nous n'étudierons que les valeurs de x réelles et nous supposerons les coefficients réels. Alors, les valeurs initiales de y et de y' étant supposées réelles, nous n'aurons que des intégrales réelles.

Si l'on fait x infini, l'équation devient

$$y'' + a_0 y = 0.$$

Les intégrales de cette équation se comportent différemment suivant que a_0 est positif ou négatif.

Si $a_0 > 0$, l'intégrale est une sinusoïde, c'est-à-dire une courbe qui se comporte de façon assez compliquée à l'infini ; on conçoit que ces complications subsistent lorsque l'on prend l'équation complète.

Nous nous bornerons au cas où $a_0 < 0$, cas où l'intégrale se comporte à l'infini comme l'exponentielle. Posant $a_0 = -a^2$, nous avons l'équation $y'' - a^2 y = 0$, qui admet les deux intégrales e^{ax} et e^{-ax}. On peut d'ailleurs, évidemment, supposer $a > 0$.

Cela étant, nous allons démontrer que l'équation proposée

$$y'' + \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots\right) y = 0$$

admet une intégrale de la forme $y_1 = e^{ax}(1 + \varepsilon_1)$ et une autre de la forme $y_2 = e^{-ax}(1 + \varepsilon_2)$, ε_1, ε_2 tendant vers zéro lorsque x croît indéfiniment. L'intégrale générale sera alors

$$c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Ce que nous chercherons en réalité, ce sont les représentations asymptotiques de $e^{-ax} y_1$ et de $e^{ax} y_2$ ou de $(1 + \varepsilon_1)$ et de $(1 + \varepsilon_2)$. Notre but sera donc de représenter asymptotiquement ε_1 et ε_2.

L'intégrale particulière $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ a des propriétés très différentes selon que c_1 est ou n'est pas nul, car si c_1 est $\neq 0$, l'intégrale augmente indéfiniment avec x, alors que si $c_1 = 0$, elle tend vers zéro. Si $c_1 \neq 0$, on sera obligé, pour avoir une représentation asymptotique, de multiplier par e^{-ax}. On aura

$$e^{-ax} y = c_1 (1 + \varepsilon_1) + c_2 e^{-2ax} (1 + \varepsilon_2),$$

de sorte que pour ces intégrales le second terme est d'un ordre inférieur à $\frac{1}{x^n}$ quel que soit n. La représentation asymptotique ne permettra pas de distinguer les diverses intégrales correspondant aux différentes valeurs de c_2. C'est là un fait de même nature que le fait déjà signalé : une série asymptotique peut représenter plusieurs fonctions.

Mais il n'en sera pas de même si $c_1 = 0$.

On aura

$$y = c_2 y_2; \qquad e^{ax} y = c_2(1 + \varepsilon_2),$$

et l'on peut espérer trouver une représentation asymptotique *déterminant* y_2, car elle ne correspondra qu'à cette intégrale.

Ayant ainsi éclairé notre route, nous allons rechercher s'il y a des représentations asymptotiques des intégrales de l'équation

$$y'' + y\left(-a^2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right) = 0.$$

Posons

$$y = e^{-ax}\left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots\right).$$

Nous savons que si $e^{ax}y$ a une représentation asymptotique, en remplaçant y par la valeur ainsi obtenue dans l'équation différentielle, celle-ci doit être formellement vérifiée.

Si $y = e^{-ax}s$, on en tire

$$y'' = e^{-ax}(s'' - 2as' + a^2 s).$$

Donc

$$e^{ax}y'' = \frac{2c_1}{x^3} + \frac{2.3c_2}{x^4} + \frac{3.4c_3}{x^5} + \dots$$
$$+ 2a\frac{c_1}{x^2} + 2a\frac{2c_2}{x^3} + 2a\frac{3c_3}{x^4} + \dots + a^2 + a^2\frac{c_1}{x} + a^2\frac{c_2}{x^2} + \dots$$

On doit avoir identiquement

$$\frac{2c_1}{x^3} + \frac{2.3c_2}{x^4} + \frac{3.4c_3}{x^5} + \dots + \frac{2ac_1}{x^2} + 2a\frac{2c_2}{x^3} + 2a\frac{3c_3}{x^4} + \dots$$
$$+ \frac{a_1}{x}\left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots\right) + \frac{a_2}{x^2}\left(1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots\right)$$
$$+ \frac{a_3}{x^3}\left(1 + \frac{c_1}{x} + \dots\right) + \dots = 0.$$

En annulant tout d'abord le coefficient du seul terme en $\frac{1}{x}$, on voit qu'il faut que l'on ait

$$a_1 = 0.$$

Nous ferons désormais cette hypothèse.

En annulant ensuite les coefficients de $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \dots, \frac{1}{x^{n+1}}, \dots,$

on obtient les relations

$$
\begin{aligned}
2ac_1 + a_2 &= 0,\\
4ac_2 + 2c_1 + a_2c_1 + a_3 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
2nac_n + (n-1)nc_{n-1} + a_2c_{n-1} + a_3c_{n-2} + \ldots + a_{n+1} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

qui permettent de calculer successivement $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$.

A l'aide des formules précédentes, on peut s'assurer que la série

$$1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots$$

est en général divergente. En particulier, si tous les coefficients a_k sont nuls excepté a_2, la formule générale donne

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = -\frac{n(n-1) + a_2}{2an}.$$

Cependant la série n'est pas extrêmement divergente, et elle cesse de l'être si l'on divise le terme de rang n par $n!$: la série

$$\sum \frac{c_n}{n!}\frac{1}{x^n}$$

est convergente.

Nous savons maintenant que nous aurons des développements asymptotiques. Il s'agit de montrer qu'ils correspondent à des intégrales.

Dire que le développement y représente bien une intégrale, c'est dire qu'en posant

$$(1) \qquad e^{ax}y = 1 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{w}{x^{n+1}},$$

on a

$$\lim_{x = +\infty} w = c_{n+1}.$$

A l'équation en y correspondra une équation en w également linéaire. Nous aurons à étudier cette équation et à montrer qu'elle a une intégrale *unique* tendant vers c_{n+1} pour $x = +\infty$.

Alors l'équation proposée aura certainement une intégrale, représentée par le développement calculé.

Il importe que l'intégrale w soit unique, car si l'on pose

$$(2) \qquad e^{ax}y = 1 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{w_1}{x^{n+2}}$$

et si l'équation différentielle que vérifie y est

$$f(y) = 0, \tag{3}$$

en remplaçant y d'après les relations (1) et (2) on aura deux équations différentielles correspondantes

$$F(w) = 0, \tag{4}$$

$$F_1(w_1) = 5. \tag{5}$$

Si alors on a montré qu'il y a une intégrale w de l'équation (4) tendant vers c_{n+1} pour $x = +\infty$, à cette intégrale particulière correspond par la relation (1) une intégrale particulière y. Dans l'équation (5) il y a alors d'après la relation (2), une intégrale w_1 qui tend vers c_{n+2} pour $x = +\infty$ et à laquelle il correspond dans l'équation (3) une intégrale particulière y. La difficulté est de savoir si les deux intégrales particulières y coïncident. S'il en est ainsi, nous pourrons dire qu'il y a une intégrale déterminée de l'équation (3) qui satisfait à la fois aux relations (1) et (2) et le développement y représentera bien une intégrale.

Je dis que cela aura lieu certainement si l'intégrale w en question est unique. Au moyen de l'intégrale w_1 tendant vers c_{n+2} nous obtenons, avons-nous dit, une valeur de y d'après (2). La relation (1) donne alors une intégrale w de (4) tendant vers c_{n+1} et coïncidant nécessairement avec la précédente. Donc en remplaçant w par l'intégrale trouvée dans (1), ou w_1 dans (2), on obtient la même intégrale y.

Nous devrons donc faire la substitution (1), dans laquelle n est quelconque, et montrer que l'équation (4) en w ainsi obtenue n'a qu'une intégrale tendant vers c_{n+1}.

Nous remplacerons y par $e^{-ax}\left[1 + \frac{c^1}{x} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{w}{x^{n+1}}\right]$. Or, on a déterminé les coefficients c de façon qu'en remplaçant dans l'équation proposée y par le développement indéfini l'expression s'annule identiquement. Il s'ensuit que les coefficients des premières puissances de $\frac{1}{x}$ jusqu'à la puissance $\frac{1}{x^n}$ s'annuleront, c'est-à-dire que $\frac{1}{x^{n+1}}$ sera en facteur.

En posant $y = e^{-ax}s$ on a $y'' = e^{-ax}(s'' - 2as' + a^2 s)$. En supprimant le facteur e^{-ax} il vient alors

$$\begin{aligned}&\frac{(n-1)nc_{n-1}}{x^{n+1}} + \frac{n(n+1)c_n}{x^{n+2}} + \frac{w''}{x^{n+1}} - \frac{2(n+1)w'}{x^{n+2}}\\ &+\frac{(n+1)(n+2)w}{x^{n+3}} - 2a\left[-\frac{nc_n}{x^{n+1}} + \frac{w'}{x^{n+1}} - \frac{(n+1)w}{x^{n+2}}\right]\\ &+\frac{a^2 w}{x^{n+1}} + \frac{w}{x^{n+1}}\left(-a^2 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots\right)\\ &+\frac{1}{x^{n+1}}(a_2c_{n-1} + a_3c_{n-2} + \dots + a_{n+1}) + \frac{1}{x^{n+2}}(a_2c_n + \dots) + \dots = 0.\end{aligned}$$

Le coefficient du terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$, dans la partie indépendante de w' et w'', est nul d'après la relation entre les a et les c. L'équation peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}&w'' - 2\left(a - \frac{n+1}{x}\right)w' - w\left[\frac{2a(n+1)}{x} - \frac{a_2 + (n+1)(n+2)}{x^2} + \dots\right]\\ &+\frac{1}{x}\left[n(n+1)c_n + a_2c_n + a_3c_{n-1} + \dots + a_{n+2}\right] + \frac{1}{x^2}(\dots) + \dots = 0.\end{aligned}$$

Le coefficient du terme en $\frac{1}{x}$ indépendant de w et w' est égal à $-2a(n+1)c_{n+1}$. On peut donc écrire encore

$$\begin{aligned}&w'' - 2\left(a - \frac{n+1}{x}\right)w'\\ &\quad - (w - c_{n+1})\left[\frac{2a(n+1)}{x} + \frac{a_2 + (n+1)(n+2)}{x^2} + \dots\right]\\ &\qquad\qquad + \frac{1}{x^2}(\dots) + \dots = 0,\end{aligned}$$

ou, en posant $w - c_{n+1} = \mathrm{W}$,

$$\mathrm{W}'' - 2\left(a - \frac{n+1}{x}\right)\mathrm{W}' - \mathrm{W}\left[\frac{2a(n+1)}{x} + \dots\right] + \frac{1}{x^2}(\dots) + \dots = 0.$$

On fera disparaître la dérivée première par la substitution

$$\mathrm{W} = e^{ax}x^{-n-1}\mathrm{Z},$$

ce qui donne

$$\mathrm{Z}'' + \mathrm{Z}\left(-a^2 + \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\alpha_3}{x^3} + \dots\right) = e^{-ax}\left(\frac{\beta}{x^{n+2}} + \dots\right).$$

Le résultat essentiel de ce calcul est qu'il n'y a pas de terme en $\frac{1}{x}$ dans le coefficient de Z ; on est ainsi conduit, avec M. Kneser, à étudier les équations ayant la forme plus générale

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ tendant vers zéro pour x infini et l'intégrale $\int_x^\infty \varphi(x)\,dx$ ayant un sens.

Occupons-nous d'abord de l'équation

$$y'' = f(x, y)$$

avec la condition que lorsque x est compris dans un certain intervalle $(a < x < b)$, on a

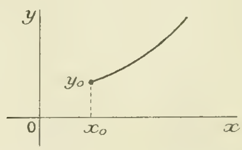
$$yf(x, y) > 0.$$

Ces équations du second ordre ont des propriétés particulières qui tiennent à ce que certains cas d'indétermination, qui, dans le cas général, sont dus à des oscillations des intégrales, ne se produisent pas par suite de la condition restrictive $yf > 0$. Une des plus grandes difficultés que l'on rencontre en effet dans l'étude des équations différentielles, difficulté dont les travaux bien connus de M. Painlevé ont montré toute l'importance, est la suivante : quand x tend vers x_0, il peut arriver que y ne tende vers aucune valeur, pas même vers l'infini.

Nous supposerons la fonction $f(x, y)$ continue, ainsi que ses dérivées, dans l'intervalle considéré. Nous allons nous rendre compte par un raisonnement géométrique de la manière dont se comportent les intégrales. Si l'on représente l'intégrale par une courbe, la condition $yf > 0$ exprime que la convexité sera toujours tournée vers Ox, car y et y'' sont de même signe.

1° Supposons $y_0 > 0$, $y'_0 > 0$. Alors on a $y''_0 > 0$. La courbe aura l'allure indiquée (*fig.* 1), et les inégalités écrites ne cesseront

Fig. 1.



pas d'être vérifiées jusqu'au moment où y ou y' deviendra infini. Cela pourra arriver pour x fini. Sinon, si x croît indéfiniment, il en est de même de y, car si $y'_0 > b$, on aura

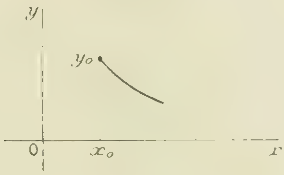
$$y - y_0 > b(x - x_0).$$

Ainsi, dans le cas où l'on part de valeurs initiales y_0, y'_0, y''_0, toutes positives, nous n'aurons pas d'indétermination.

2° Supposons $y_0 > 0$, $y'_0 < 0$, $y''_0 > 0$.

A partir du point initial, la courbe affecte la forme indiquée (*fig.* 2).

Fig. 2.

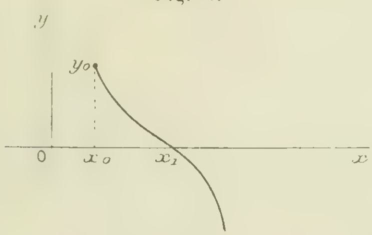


Il peut arriver d'abord que l'une des quantités y et y' s'annule.

Ces deux quantités ne peuvent s'annuler en même temps, car, si pour $x = x_1$ on avait $y = 0$, $y' = 0$, l'intégrale unique serait identiquement nulle. Il faut remarquer que la condition $yf > 0$ entraîne que f s'annule en même temps que y, puisque f est supposée continue.

Si donc y s'annule le premier, on aura la forme de la *fig.* 3 et,

Fig. 3.



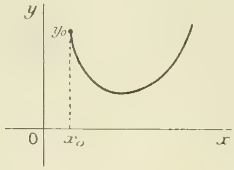
à partir du point x_1, on aura les inégalités

$$y < 0, \quad y' < 0, \quad y'' < 0,$$

car y'' change de signe avec y.

Si y' s'annule le premier, on aura la forme de la *fig.* 4 et l'on sera ramené au premier cas étudié.

Fig. 4.

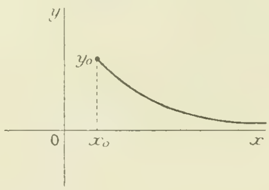


Les intégrales que nous obtenons jusqu'ici augmentent indéfiniment, positivement ou négativement.

Si les conditions $y > 0$, $y' < 0$, $y'' > 0$ sont vérifiées indéfiniment, c'est-à-dire si ni y ni y' ne s'annulent, y tend vers une limite finie et, par suite, il en est de même de y' et y''.

Si y'' ne tendait pas vers zéro, y' ne pourrait rester fini. Donc y'' tend vers zéro et, comme y et f s'annulent en même temps, y tend vers zéro. On a la courbe indiquée (*fig.* 5) asymptote à l'axe des x.

Fig. 5.



Nous obtiendrions aussi le cas de la courbe symétrique par rapport à Ox en supposant $y_0 < 0$, $y'_0 > 0$, $y''_0 < 0$.

Nous allons montrer que, pour l'équation linéaire

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)]$$

ou

$$y'' = yf(x),$$

il n'est pas possible que y soit infini pour x fini.

On a en effet

$$y''y' = yy'f(x)$$

et

$$\int_{x_0}^{x_1} y''y'\,dx = \int_{x_0}^{x_1} yy'f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} y''y'\,dx = f(\xi)\int_{x_0}^{x_1} yy'\,dx$$

avec

$$x_0 < \xi < x_1,$$

donc

$$y_1'^2 - y_0'^2 = (y_1^2 - y_0^2)f(\xi),$$

ce qui montre que, lorsque y augmente indéfiniment, il en est de même de y' (on peut supposer que f n'est pas nul). D'autre part $\frac{y_1'}{y_1}$ tend vers une limite, ou n'augmente pas indéfiniment. On peut poser $\frac{y_1'}{y_1} < k$, k étant donné.

Il en résulte que

$$Ly - Ly_0 < k(x - x_0),$$

ou

$$y < y_0 e^{k(x-x_0)},$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse où y augmenterait indéfiniment pour x fini.

En résumé nous avons trouvé deux cas essentiels, suivant les conditions initiales :

1° y augmente indéfiniment,

2° y tend vers zéro.

Pour l'équation que nous considérons à l'intégrale y correspond l'intégrale $-y$. Nous pourrons donc nous borner à considérer les courbes intégrales qui sont situées au-dessus de Ox.

Je dis que, si l'on considère deux intégrales de l'équation considérée, elles ne peuvent avoir deux points communs.

Soient x_0, y_0 un point commun A, et en ce point deux valeurs différentes pour y' (sinon, les intégrales coïncideraient). On a deux intégrales Y et y. Je dis que si, en partant de A, Y est plus grande que y, elle le restera toujours. On a par hypothèse

$$Y - y > 0, \qquad Y' - y' > 0.$$

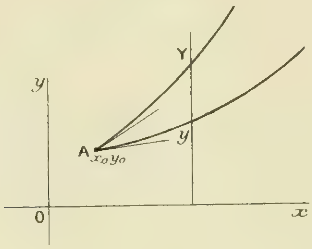
Ceci entraîne

$$Y'' - y'' > 0,$$

d'après la forme même de l'équation. Donc $Y - y$, $Y' - y'$, $Y'' - y''$ ne cesseront pas d'être positives, d'après ce que nous avons vu.

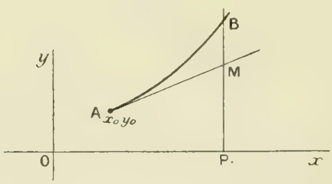
Les deux intégrales iront donc en s'éloignant de plus en plus, comme par exemple dans la *fig.* 6 :

Fig. 6.



De ce qui précède il résulte que, si l'on se donne une valeur y' correspondant à x_0 et si l'intégrale va en augmentant, elle est constamment située au-dessus de la tangente ; en coupant par une parallèle quelconque à Oy on est sûr d'atteindre l'intégrale en un point B situé au-dessus du point M déterminé sur la tangente (*fig.* 7) :

Fig. 7.



Nous sommes, par suite, certains qu'il y a des intégrales coupant une parallèle à Oy en un point situé au-dessus d'un point M quelconque donné à l'avance. Il suffit, pour obtenir une intégrale satisfaisant à cette condition et passant par le point $A(x_0 y_0)$, de prendre pour valeur initiale de y' le coefficient angulaire de AM.

D'ailleurs, ce que nous avons dit pour les points situés au-dessus de Ox est également vrai pour les points situés au-dessous. L'intégrale

$$y = f(x, x_0, y_0, y'_0)$$

est, en effet, une fonction continue de x et des valeurs initiales, donc en particulier de y'_0.

Nous pourrons donc atteindre tout point B de la parallèle à Oy au moyen d'une intégrale partant de A.

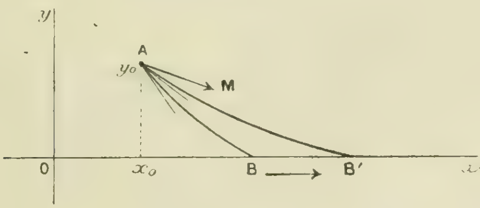
Il résulte de ce qui précède qu'une intégrale se trouve déterminée d'une manière unique si l'on en donne deux points et que si l'on fait tourner la tangente initiale autour du point A, le point B se déplacera toujours dans le même sens.

Lorsque pour x_0 on se donne la valeur y_0 il n'y a qu'une intégrale admettant cette valeur initiale et tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$: telle est la proposition fondamentale qu'il nous faut maintenant démontrer.

Par le point $A(x_0, y_0)$ et un point B de Ox passe une intégrale, qui est unique.

Lorsque B s'éloigne de l'origine sur Ox, cette propriété ne cesse pas d'avoir lieu. Si l'on considère le coefficient angulaire y'_0, il varie constamment dans le même sens (*fig.* 8), et reste inférieur

Fig. 8.



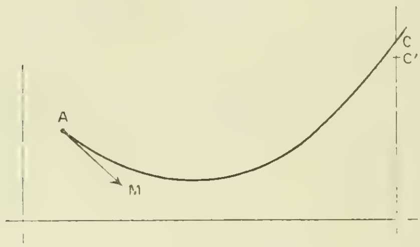
à une certaine quantité. Dans la *fig.* 8, par exemple, y'_0 étant négatif reste inférieur à un nombre positif quelconque. Donc, si le point B s'éloigne indéfiniment, le coefficient angulaire y'_0 a certainement une limite, c'est-à-dire que la tangente en A a une certaine limite AM. Je dis que l'intégrale qui correspond à cette limite tend vers zéro quand x croît indéfiniment.

En effet, les deux seules autres hypothèses possibles, d'après ce que nous avons vu, sont celles qui correspondent aux *fig.* 3 et 4, dans lesquelles l'intégrale croît indéfiniment sans rencontrer Ox ou rencontre cet axe à distance finie.

Dans le premier cas (*fig.* 9), si l'on considère une ordonnée donnant un point C situé au-dessus du point A, comme l'intégrale varie d'une manière continue avec la tangente en A, en donnant à cette tangente des positions voisines de AM et situées au-dessous de AM nous obtiendrons des points C' voisins de C et, par suite, si l'on veut, situés au-dessus du point A. Ils correspondront donc à des intégrales augmentant indéfiniment. Or AM est la limite des tangentes aux intégrales rencontrant Ox. Cette hypothèse est donc à rejeter.

Il en est de même de l'autre, car si l'intégrale tangente à AM rencontrait Ox à distance finie, d'après la raison de continuité il en serait de même des intégrales voisines, c'est-à-dire ayant des

Fig. 9.



tangentes voisines de AM et situées au-dessus de AM; ce résultat est encore en contradiction avec la définition de AM.

Il ne reste donc que la seule hypothèse de l'intégrale asymptote à Ox.

Cette intégrale est unique. Si, en effet, une autre intégrale passant par A était asymptote à Ox, elle devrait nécessairement être située au-dessus de la première en partant de A. On aurait alors, pour toute valeur de x,

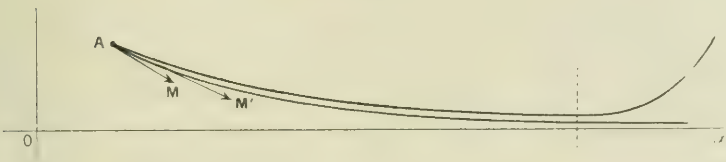
$$Y - y > 0, \quad Y' - y' > 0, \quad Y'' - y'' > 0.$$

Donc, $Y - y$ augmentant indéfiniment, Y et y ne pourraient pas tendre simultanément vers zéro.

Nous avons vu que, si l'on coupe les intégrales issues d'un point A par une ordonnée ou par une droite quelconque à distance finie, le point d'intersection varie d'une manière continue quand on fait ainsi varier la tangente initiale. Mais, si la droite s'éloigne à l'infini, il y a discontinuité. Il y a une intégrale unique tendant vers zéro, toutes les autres croissant indéfiniment ou décroissant de même. Une intégrale voisine de la première aussi loin qu'on le voudra finira par s'en éloigner indéfiniment (*fig.* 10).

Ce fait est analogue au suivant, qui se rencontre dans les problèmes de stabilité : il se peut qu'une modification infiniment petite des conditions initiales change complètement le résultat. C'est ce qui fait que le problème de la stabilité d'un système physique donné peut n'avoir aucun sens, à cause de la précision *limitée* avec laquelle on peut connaître les conditions initiales,

Fig. 10.



alors qu'il en aurait un si les conditions de stabilité se traduisaient par des *inégalités* auxquelles doivent satisfaire ces données [1].

Reprenons l'étude de l'intégrale particulière tendant vers zéro (*fig.* 5). De l'équation

$$y'' = y[a^2 + \varphi(x)]$$

on déduit comme nous l'avons déjà fait

$$y_1'^2 - y_0'^2 = (y_1^2 - y_0^2)[a^2 + \varphi(\xi)] \qquad (x_0 < \xi < x_1)$$

ou

$$\frac{y_1'^2 - y_0'^2}{y_1^2 - y_0^2} - a^2 = \varphi(\xi).$$

Nous allons faire augmenter indéfiniment x_0 et x_1 ; $\varphi(\xi)$ tendra vers zéro. Nous pouvons donc prendre x_0 assez grand pour que

$$\varphi(\xi) < \varepsilon.$$

y_0 et y_0' sont alors très petits. Nous pouvons alors prendre x_1

(1) *Voir* les travaux de M. Hadamard sur les géodésiques des surfaces à courbure totale négative : *Journal de M. Jordan*, 1898, p. 71.

assez grand pour que

$$y_1' = \varepsilon_1 y_0',$$
$$y_1 = \varepsilon_2 y_0,$$

avec

$$\varepsilon_1 < \varepsilon,$$
$$\varepsilon_2 < \varepsilon.$$

On aura alors

$$\frac{y_0'^2(1-\varepsilon_1^2)}{y_0^2(1-\varepsilon_2^2)} - a^2 < \varepsilon.$$

Cette inégalité exprime évidemment que l'on aura

$$\frac{y_0'^2}{y_0^2} - a^2 < \varepsilon',$$

ε' étant aussi petit qu'on le voudra.

Donc $\frac{y'^2}{y^2}$ tend vers a^2. $\frac{y'}{y}$ étant négatif, on en déduit que

$$\lim \frac{y'}{y} = -a.$$

C'est un cas particulier d'un résultat plus général obtenu par M. Poincaré.

L'intégrale en question pourra donc, pour x très grand, se mettre sous la forme

$$y = e^{-ax}[1 + \varepsilon(x)],$$

et le fait qu'il y a une seule intégrale de cette nature entraîne qu'elle sera bien représentée par le développement asymptotique calculé. Le résultat précédent s'applique aussi à l'équation en Z de la page 45 et établit par conséquent la légitimité du développement asymptotique. Pour les applications à des équations particulières, nous renverrons aux Mémoires de M. Kneser et aussi à une série importante de Mémoires publiés par M. Horn [1].

Nous espérons avoir montré par l'exemple qui a été développé combien il peut se poser de questions intéressantes et souvent assez faciles à propos des applications de la théorie générale de M. Poincaré à des exemples convenablement choisis. Il y a là un champ important de recherches encore assez peu exploré.

---

[1] Horn, *Mathematische Annalen*, t. 49 et suiv.

CHAPITRE II.

LES FRACTIONS CONTINUES ET LA THÉORIE DE STIELTJES.

La conversion des séries divergentes en fractions continues.

Laguerre paraît avoir le premier montré nettement l'utilité qu'il peut y avoir à transformer une série divergente, ordonnée suivant les puissances croissantes ou décroissantes d'une variable, en une fraction continue convergente. Il a donné, en effet, un exemple particulièrement remarquable, dans lequel la valeur de la fraction continue convergente est précisément égale à la fonction qui a donné naissance à la série divergente.

Laguerre part de l'intégrale définie

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u} = e^z \int_z^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u}.$$

Si l'on cherche à développer cette intégrale suivant les puissances décroissantes de z, on obtient

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \frac{u^3}{z^4} + \ldots\right) e^{-u}\,du,$$

et l'intégration terme à terme donne

$$J = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1.2}{z^3} - \frac{1.2.3}{z^4} + \frac{1.2.3.4}{z^5} - \ldots,$$

série divergente pour toute valeur de z.

Mais Laguerre observe que cette série divergente est formellement égale à la fraction continue suivante

$$F = \cfrac{1}{z+1-\cfrac{1}{z+3-\cfrac{4}{z+5-\cfrac{9}{z+7-\cfrac{16}{z+9-\cfrac{25}{z+11-\ldots}}}}}},$$

fraction continue qui peut aussi s'écrire, d'après Stieltjes,

$$F = \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{z + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{z + \dots}}}}}}}$$

Le résultat important obtenu par Laguerre, c'est que l'on a

$$J = F,$$

c'est-à-dire que l'intégrale définie est égale à la série que l'on en a déduite par l'intermédiaire de la série divergente. Il est alors assez naturel d'attribuer à cette série la valeur commune de J et de F; on obtient ainsi, en faisant $z = 1$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{1+u} = 1 - 1 + 1.2 - 1.2.3 + 1.2.3.4 - \dots.$$

On trouve ainsi la somme de la série (2), considérée page 8, et dont s'est occupé Lacroix; on a

$$s = 1 - 1.2 + 1.2.3 - 1.2.3.4 + \dots = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{1+u}.$$

Si l'on tient compte de la relation

$$1 = \int_0^\infty e^{-u}\,du,$$

le résultat précédent peut aussi se mettre sous la forme

$$s = \int_0^\infty e^{-u}\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = \int_0^\infty \frac{ue^{-u}}{1+u}\,du.$$

On obtient ainsi

$$s = 0,4036526\dots.$$

résultat qui concorde avec celui qu'a obtenu Lacroix par une méthode basée sur la théorie des différences (¹).

(¹) Lacroix, t. III, p. 346-348. On trouve dans le même Ouvrage (p. 391) une fraction continue déduite par Euler de l'intégrale définie que nous considérons, Mais le résultat précédent de Laguerre resta d'abord isolé et ne parut point de nature à être la base d'une théorie générale; c'est seulement longtemps après que Stieltjes, après avoir étudié d'une manière approfondie quelques cas particuliers analogues, obtint la belle généralisation dont l'étude fera l'objet du prochain paragraphe.

Mais, auparavant, nous allons dire quelques mots des travaux de M. Padé sur les fractions continues, afin de pouvoir consacrer exclusivement la fin du chapitre aux travaux de Stieltjes et à leurs conséquences au point de vue de la théorie générale des séries divergentes.

On sait que la propriété essentielle des fractions continues arithmétiques est de fournir, par leurs réduites, des expressions fractionnaires plus approchées d'un nombre irrationnel donné, que toute expression fractionnaire de termes moindres. Ce nombre irrationnel est dit la *valeur* de la fraction continue.

La propriété analogue des fractions continues *algébriques*, c'est-à-dire dans lesquelles les quotients incomplets sont des polynomes, est la suivante : les réduites, c'est-à-dire les fractions rationnelles obtenues en limitant la série à un quotient incomplet déterminé, sont des fractions rationnelles plus approchées d'une série entière que toute fraction dont les termes sont de degrés moindres. Que doit-on entendre par là?

Étant donnée une série entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

on peut se proposer de déterminer une fraction rationnelle, dont le numérateur soit de degré p, le dénominateur de degré q, par la condition que le développement en série de cette fraction rationnelle suivant les puissances croissantes de z coïncide le plus longtemps possible, dans ses premiers termes, avec le développement en série de $f(z)$. On peut remarquer que la fraction rationnelle cherchée renferme $(p+1)+(q+1) = p+q+2$ coeffi-

---

fraction continue qui diffère de celle de Laguerre et de celle de Stieltjes. Lacroix ajoute (p. 392, note) : « Il est facile de voir que l'on peut, par des procédés analogues au précédent, convertir en fraction continue toute série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs ». Mais ce point n'est pas développé par Lacroix.

cients sous forme homogène, c'est-à-dire dépend de $p+q+1$ constantes; en identifiant les $p+q+1$ premiers termes du développement en série de la fraction rationnelle avec les termes correspondants du développement en série de $f(z)$, on obtiendra $p+q+1$ équations linéaires et homogènes à $p+q+2$ inconnues, équations qui admettent toujours des solutions non toutes nulles.

Il y aura donc toujours une fraction rationnelle de degré (p, q) et approchée de $f(z)$ jusqu'aux termes de degré $p+q$ inclusivement, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\frac{P_p(z)}{Q_q(z)} - f(z) = z^{p+q+1}(A_0 + A_1 z + \ldots).$$

Nous laisserons d'ailleurs complètement de côté les cas anormaux où la fraction obtenue aurait des termes de degrés inférieurs à p ou à q, ou bien donnerait une approximation plus grande que celle que l'on cherchait. Ces deux cas, qui se ramènent d'ailleurs l'un à l'autre, sont étudiés en détail dans la Thèse de M. Padé [1].

On voit que la fraction continue ayant pour but de fournir des fractions rationnelles approchées, il peut sembler naturel de substituer à son étude celle de ces fractions.

Il semble que ce soit Laguerre qui ait tenté le premier cette étude dans un cas particulier, celui de la fonction exponentielle

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Il calcule les fractions rationnelles approchées de cette série [2] pour des degrés quelconques (p, q) et donne des propriétés intéressantes de leurs numérateurs et de leurs dénominateurs.

Dans son intéressante Thèse, M. Padé a étudié la question à un point de vue tout à fait général; il a fait observer tout d'abord que chaque développement en fraction continue fournit seulement une classe de fractions rationnelles approchées, pour lesquelles les degrés du numérateur et du dénominateur sont liés par une

---

(1) *Annales de l'École Normale*, série III, t. IX, 1892, Supplément.

(2) *Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 115.

certaine loi. Par exemple, pour les fractions continues de Stieltjes que nous étudierons bientôt, les réduites de rang $2n+1$ et $2n+2$ ont leurs numérateurs de degré n et leurs dénominateurs de degré $n+1$ (1).

On obtient donc, par une fraction continue donnée, seulement une portion des fractions rationnelles approchées, et une portion d'ailleurs variable suivant la forme de la fraction continue. Il en résulte que l'expression : *développer une fonction en fraction continue,* n'a pas de sens précis, puisque l'on obtiendra des développements différents suivant la manière dont on choisira, parmi les fractions rationnelles approchées, une infinité d'entre elles, pour servir de réduites à la fraction cherchée. Ce choix ne peut d'ailleurs être fait d'une manière arbitraire et M. Padé s'est attaché à étudier les relations entre le Tableau complet des fractions rationnelles approchées et les diverses fractions continues possibles. Quelque intérêt que puissent présenter ces recherches, il n'y a pas lieu de les exposer ici, car elles sont complètement en dehors de notre sujet; retenons-en simplement le point essentiel, la notion du Tableau des fractions rationnelles approchées.

M. Padé donne à ce Tableau une forme rectangulaire; il le suppose indéfini vers la droite et vers le bas et inscrit dans la case située à l'intersection de la $p+1^{\text{ième}}$ colonne et de la $q+1^{\text{ième}}$ ligne la fraction rationnelle dont le numérateur est de degré p et le dénominateur de degré q. On peut remarquer que ce Tableau est complètement défini lorsqu'on donne une infinité des fractions qu'il contient, quelle que soit la manière dont ces fractions sont choisies.

Ces préliminaires étant établis, voici comment on peut rattacher la considération du Tableau à la théorie des séries divergentes (2). Supposons que l'on nous ait donné une série entière toujours divergente et que nous ayons formé le Tableau correspondant; il pourra arriver qu'une suite infinie de fractions du Tableau converge, au moins dans un certain champ de la va-

(1) Elles se distinguent par la présence du facteur z dans le dénominateur des réduites de rang impair; mais nous devons renvoyer pour ces détails au Mémoire de Stieltjes.

(2) PADÉ, *Acta mathematica,* t. XVIII.

riable z, et définisse ainsi une fonction dans ce champ ([1]) : *on pourra faire correspondre cette fonction à la série.*

Il est d'ailleurs clair que si l'on ajoute ou si l'on multiplie deux séries divergentes, les fractions rationnelles approchées de la série somme ou produit peuvent se déduire simplement des fractions rationnelles approchées des séries proposées. Sans entrer dans le détail du calcul, remarquons qu'il n'est besoin d'aucune démonstration pour prouver que ces opérations peuvent se faire de la même manière dans le cas de la divergence et dans celui de la convergence, puisque les résultats des opérations algébriques effectuées sur les coefficients, représentés par des lettres, sont manifestement indépendants de la valeur numérique de ces coefficients.

Malheureusement les remarques précédentes sont loin de suffire à constituer une théorie satisfaisante. Deux questions essentielles devraient tout d'abord être résolues.

1° Étant donné un Tableau déduit d'une série divergente, si l'on choisit dans ce Tableau une infinité de fractions convergeant vers une limite, puis une autre infinité convergeant aussi vers une limite, peut-on affirmer que ces deux limites sont toujours égales? ou tout au moins préciser dans quels cas elles le sont?

2° La question précédente étant supposée résolue, au moins pour les séries que l'on considère, peut-on affirmer que la série somme (ou produit) de deux séries divergentes donne naissance à un Tableau dans lequel une infinité de fractions converge, lorsqu'il en est ainsi pour les deux séries considérées? De plus, la fonction que l'on est amené à faire correspondre à la série somme (ou produit) est-elle la somme (ou le produit) des fonctions qui correspondent aux séries données?

Ces questions fondamentales une fois résolues, on pourra s'en poser d'analogues relatives au quotient de deux séries, à la dérivée ou à l'intégrale d'une série; mais aussi longtemps que les deux questions fondamentales ne seront pas traitées, il n'y aura nulle exagération à affirmer que la théorie dont on vient d'indiquer brièvement les bases possibles *n'existe pas*.

M. Padé n'en a pas moins le grand mérite d'avoir, par son Mé-

---

([1]) Cette fonction sera sûrement analytique si la convergence est uniforme.

moire des *Acta*, indiqué un sujet de recherches des plus intéressants et dans lequel il serait de la plus haute importance d'obtenir des résultats. Ces recherches paraissent, il est vrai, être difficiles; mais elles semblent d'autre part promettre, une fois les premières difficultés vaincues, d'être très fécondes, et l'importance des résultats à obtenir encouragera peut-être quelque chercheur à y consacrer ses efforts, malgré les difficultés du sujet.

On voit combien est peu aisée l'étude générale des rapports entre les fractions continues et les séries divergentes; il semble, d'ailleurs, que les moyens actuels de l'Analyse soient impuissants à étudier, *dans toute sa généralité*, tout être analytique tant soit peu compliqué ([1]). On est alors réduit à s'occuper de cas particuliers; on gagne en profondeur ce qu'on perd en généralité et l'on peut espérer, comme le montre à chaque instant l'histoire de la Science, arriver par cette voie à la connaissance du cas général. C'est ce qu'a fait Stieltjes pour les fractions continues, avec un succès qui est de nature à encourager des efforts analogues.

Le Mémoire de Stieltjes.

Stieltjes a exposé ses beaux résultats dans un Mémoire qu'il a présenté à l'Académie des Sciences, où il a été l'objet d'un Rapport de M. Poincaré ([2]) et qui a été imprimé, peu de temps avant la mort prématurée de l'auteur, dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* ([3]).

Ce Mémoire est assez étendu, et les démonstrations y sont souvent un peu longues, à cause de la nature même du sujet: il est d'ailleurs rédigé avec le plus grand soin et la lecture en est aussi aisée qu'intéressante; nous serions heureux que les détails que nous allons donner à son sujet encouragent nos lecteurs à la tenter. Nous ne pouvons songer, en effet, à reproduire ici les démonstrations des résultats fondamentaux de Stieltjes; elles

---

([1]) *Cf.* les remarques qui se trouvent au début de mon Mémoire *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV).

([2]) *Comptes rendus*, t. CXIX, p. 630.

([3]) T. VIII et IX (1894 et 1895); la partie la plus importante du Mémoire est dans le Tome VIII.

occuperaient presque tout un livre comme celui-ci; nous allons nous borner à énoncer ceux des résultats dont la démonstration, bien qu'offrant un grand intérêt en elle-même, n'en a pas au point de vue de la théorie des séries divergentes, qui nous occupe ici. Lorsque nous en arriverons au point où la théorie de Stieltjes a des rapports intimes avec la théorie générale des séries divergentes, nous reprendrons la forme ordinaire d'exposition, joignant les démonstrations aux énoncés.

Le point de départ des recherches de Stieltjes est la fraction continue

$$\cfrac{1}{a_1 z + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 z + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n} + \cfrac{1}{a_{2n+1} z + \ldots}}}}}}$$

dans laquelle les a_n sont des nombres réels et positifs, tandis que z est une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles ou imaginaires.

Dans le cas où z est réel et positif, il résulte de propositions déjà anciennes ([1]) que la fraction continue est divergente ou convergente, suivant que la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente ou divergente.

Dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est convergente, les réduites de rang pair de la fraction continue tendent vers une limite lorsque leur rang augmente indéfiniment; il en est de même des réduites de rang impair; *mais ces deux limites sont différentes;* la fraction ne tend donc à l'infini vers

([1]) STERN, *Journal de Crelle*, t. 37.

aucune limite déterminée : elle est divergente; on peut dire aussi, avec plus de précision, qu'elle est *oscillante*. Stieltjes étend les résultats précédents au cas où z est imaginaire; il donne aussi des propositions fort intéressantes sur les deux fonctions limites; mais nous ne nous y arrêterons pas, le seul cas intéressant pour nous étant celui où la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est *divergente*.

Dans ce cas la fraction continue est convergente, c'est-à-dire que les réduites tendent vers une limite qui est la même, quelle que soit la parité de leur rang. Stieltjes étend ce résultat, déjà connu pour les valeurs réelles positives de z, aux valeurs imaginaires. Quant aux valeurs réelles négatives, elles constituent généralement pour la fraction (et pour la fonction analytique qu'elle représente), des points singuliers où elle n'a aucune valeur déterminée.

La fraction continue représente donc, dans le cas que nous étudions, une fonction analytique n'ayant dans le plan aucune autre singularité qu'une coupure essentielle, comprenant les valeurs réelles négatives de z. D'ailleurs, dans des cas exceptionnels cette coupure peut disparaître, en tout ou en partie.

La fraction continue peut être développée en série suivant les puissances décroissantes de z. Pour effectuer ce développement, on remarque que les développements, suivant les puissances décroissantes de z, de la $n^{\text{ième}}$ et de la $(n+1)^{\text{ième}}$ réduites ont en commun leurs n premiers termes; ces termes subsistent donc dans les développements de toutes les réduites dont le rang dépasse n : ce seront les n premiers termes du développement en série de la fraction continue. On obtient ainsi ce développement sous la forme

$$F = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots.$$

Les nombres c_0, c_1, c_2, ... sont positifs; Stieltjes donne le moyen d'obtenir leurs expressions au moyen des a_n; mais ces expressions sont assez compliquées.

Au contraire, les a_n s'expriment au moyen des c_n sous une forme très élégante.

Stieltjes pose

$$A_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix},$$

$$B_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$A_0 = B_0 = 1,$$

et obtient les relations

$$a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}},$$

$$a_{2n} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}}.$$

On voit que, les c_n étant donnés, pour que les a_n soient positifs, c'est-à-dire pour que la théorie de Stieltjes s'applique, il est nécessaire que les A_n soient tous de même signe, et que les B_n soient aussi tous de même signe. Comme l'on a

$$A_0 = B_0 = 1,$$

il faut que les A_n et les B_n soient tous positifs.

Tel est le criterium auquel on reconnaîtra qu'à une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de z correspond une fraction continue de Stieltjes.

Il résulte de l'analyse de Stieltjes, bien qu'il ne formule pas ce résultat explicitement, que l'hypothèse

$$A_n > 0, \quad B_n > 0,$$

quel que soit n, a pour conséquence que *le déterminant*

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \dots & c_{p+q} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \dots & c_{p+q+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p+q} & \dots & \dots & c_{p+2q} \end{vmatrix}$$

est positif, quels que soient p et q.

En particulier, le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{vmatrix}$$

est positif, c'est-à-dire que l'on a (les c_p étant tous positifs)

$$\frac{c_{p+2}}{c_{p+1}} > \frac{c_{p+1}}{c_p}.$$

Le rapport $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ augmente donc constamment avec n; s'il tend vers une limite λ, la série proposée est convergente pour $z > \lambda$; s'il augmente indéfiniment, *la série est divergente pour toute valeur de z*. Or, ce dernier cas n'est nullement incompatible avec les hypothèses fondamentales

$$A_n > 0, \quad B_n > 0;$$

il est aisé d'en fournir des exemples.

Dès lors, *à la série divergente correspond une fraction continue convergente, dont la somme définit une fonction analytique que l'on peut faire correspondre à la série.*

Mais la proposition précédente, malgré son intérêt, n'aurait point à elle seule une importance pratique considérable, car une fraction continue est un instrument analytique compliqué et difficilement maniable. Non seulement on ne connaît aucun moyen simple de mettre sous la forme d'une fraction continue la somme de deux fractions continues, mais la simple addition d'une constante (ou d'un polynome dans le cas des fractions continues algébriques) introduit des modifications notables et dont la loi est assez compliquée.

Aussi l'intérêt principal du Mémoire de Stieltjes réside-t-il dans l'introduction d'un élément analytique bien plus simple et bien plus maniable, d'une intégrale définie. Cette intégrale donne naissance d'une manière naturelle à la série divergente, par son développement suivant les puissances décroissantes de z; et, d'autre part, la série étant donnée, on peut former l'intégrale, *en passant par l'intermédiaire de la fraction continue*; celle-ci sert donc simplement d'intermédiaire entre les deux éléments analytiques (série divergente et intégrale définie) dont nous allons maintenant étudier les rapports.

L'intégrale définie considérée par Stieltjes est de la forme [1]

$$J = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}$$

dans laquelle $f(u)$ est une fonction supposée essentiellement *positive.* Il est clair que l'intégrale J définit une fonction analytique régulière dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l'axe réel, qui est une coupure. Il faut d'ailleurs distraire de cette coupure les segments de cet axe sur lesquels $f(u)$ serait identiquement nulle. Enfin, il est manifeste que la coupure est essentielle en tous les points où $f(u)$ n'est pas analytique; au contraire, si $f(u)$ est analytique sur un segment de la coupure, on peut prolonger analytiquement la fonction au delà de ce segment en déformant le chemin d'intégration, ce qui est légitime, puisque $\frac{f(u)}{z+u}$ est analytique; la fonction définie par J est alors simplement non uniforme [2].

Mais dans tous les cas, en excluant seulement l'hypothèse où $f(u)$ serait nulle pour toutes les valeurs de u dépassant une certaine limite, le point $z=\infty$ est un point singulier pour la fonction définie par J; cette fonction ne saurait donc admettre un développement *convergent* [3], suivant les puissances de $\frac{1}{z}$.

Il est aisé de trouver son développement formel; on a

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{u}{z^2} + \frac{u^2}{z^3} - \frac{u^3}{z^4} + \ldots\right) f(u)\,du.$$

---

[1] Stieltjes considère l'intégrale plus générale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{z+u}$$

dans laquelle $\psi(u)$ est une fonction croissante, *qui peut être discontinue;* en un point de discontinuité a, où $\psi(u)$ subit un accroissement brusque égal à A, il s'introduit un terme de la forme $\frac{A}{z+a}$; ces considérations sont fort intéressantes et d'ailleurs nécessaires si l'on veut traiter la question dans toute sa généralité; nous nous bornons ici, pour simplifier, au cas où $\psi(u)$ a une dérivée, que nous désignons par $f(u)$ et que nous supposons *continue.*

[2] *Voir* plus loin pages 69-70, un calcul qui rend intuitives ces propositions.

[3] Le développement formel peut être convergent; mais il n'a alors aucun rapport avec la fonction.

Si donc l'on pose

$$(1) \qquad c_n = \int_0^\infty f(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

on obtient

$$(2) \qquad \mathrm{J} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots.$$

Nous supposons essentiellement la fonction $f(u)$ telle que toutes les intégrales (1) *aient un sens.* Dès lors, les constantes c_n sont manifestement toutes positives, puisque la fonction $f(u)$ a été supposée positive.

Dès lors, la question qui se pose est la suivante : le développement divergent (2) étant donné, peut-on à l'aide des relations (1) déterminer la fonction $f(u)$ *d'une manière unique?* Si cette détermination est possible, il sera naturel de donner pour valeur à la série divergente l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}.$$

Au contraire, s'il existe plusieurs fonctions $f(u)$ vérifiant les relations (1) (et il y en aura alors nécessairement une infinité), on sera fort embarrassé pour donner une valeur précise à la série divergente.

Il est clair que, s'il existe une fonction $f_1(u)$ distincte de $f(u)$, et telle que l'on ait

$$(3) \qquad c_n = \int_0^\infty f_1(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

on obtient, en retranchant les égalités (1) et (3)

$$0 = \int_0^\infty [f(u) - f_1(u)] u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

et, en posant

$$f(u) - f_1(u) = \varphi(u),$$

on obtient

$$(4) \qquad 0 = \int_0^\infty \varphi(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

La question se ramène donc à savoir s'il existe des fonctions $\varphi(u)$ vérifiant les relations (4). Or, *il existe effectivement de telles fonctions;* Stieltjes en donne l'exemple suivant :

$$\varphi(u) = \sin(\sqrt[4]{u})e^{-\sqrt[4]{u}},$$

et il serait aisé d'en trouver une infinité d'autres.

Comment se tirer de cette difficulté? On y arrivera en imposant à la fonction $f(u)$ des conditions supplémentaires de nature à déterminer le problème ([1]). La condition imposée par Stieltjes est que $f(u)$ *est positive;* il montre que cette condition détermine la solution d'une manière unique, au moins dans un cas étendu. Ce cas est celui où les c_n sont tels que les déterminants A_n et B_n, formés plus haut, sont positifs ([2]), et la série

$$\sum a_n$$

divergente, les a_n étant calculés au moyen des A_n et des B_n par les formules déjà données.

Dans ce cas, en effet, la fraction continue, déduite de la série, est convergente et définit une fonction analytique $F(z)$ régulière dans tout le plan, sauf sur la partie négative de l'axe réel; l'égalité ([3])

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}$$

permet de déterminer la fonction $f(u)$ ([4]). Considérons, en effet,

---

([1]) Cette nécessité d'imposer des conditions supplémentaires pour déterminer un problème est un fait général dans toutes les questions auxquelles on peut donner le nom générique de *problèmes d'interpolation*, en étendant un peu le sens habituel de ce mot. *Voir* ma Note *Sur l'interpolation* (*Comptes rendus*, 29 mars 1897) et mon *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 82.

([2]) Stieltjes prouve, en effet, que si les c_n sont déterminés par les formules (1), dans lesquelles la fonction $f(u)$ est positive, les déterminants A_n et B_n sont nécessairement positifs.

([3]) Il importe de remarquer que cette égalité n'est nullement évidente; elle implique que la série divergente doit avoir la même somme, qu'on la convertisse en fraction continue ou en intégrale définie; c'est là un des résultats les plus intéressants du Mémoire de Stieltjes.

([4]) Nous simplifions ici le calcul de Stieltjes, grâce à notre hypothèse de la continuité de $f(u)$, qui restreint d'ailleurs la généralité de la question; notre analyse ne s'applique pas au cas où les données seraient telles qu'elles devraient conduire à une fonction discontinue.

une valeur réelle et négative de z et désignons par ε une quantité réelle que nous ferons tendre vers zéro par valeurs positives. On a

$$F(-a-i\varepsilon)-F(-a+i\varepsilon)=\int_0^\infty f(u)\left(\frac{1}{u-a-i\varepsilon}-\frac{1}{u-a+i\varepsilon}\right)du$$
$$=\int_0^\infty \frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}.$$

Nous allons chercher la limite, pour $\varepsilon=0$, de l'intégrale

$$I=\int_0^\infty \frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}.$$

Cette intégrale, pour $\varepsilon=0$, rentre dans la catégorie de celles que Cauchy appelait *singulières*, c'est-à-dire dans lesquelles tous les éléments sont nuls, sauf un seul (correspondant ici à $u=a$) qui fournit à lui seul la valeur de l'intégrale.

Pour évaluer l'intégrale I, nous désignerons par h une constante positive fixe, et nous écrirons

$$I=\int_0^{a-h}\frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}+\int_{a-h}^{a+h}\frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}+\int_{a+h}^{\infty}\frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}.$$

Lorsque ε tend vers zéro, h restant fixe, la première et la troisième intégrale tendent visiblement vers zéro et l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} I=\lim_{\varepsilon=0}\int_{a-h}^{a+h}\frac{2i\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}.$$

Supposons maintenant que, dans l'intervalle $a-h$, $a+h$, la fonction $f(u)$ soit comprise entre les limites A et B; l'hypothèse

$$A\leqq f(u)\leqq B$$

entraînera

$$A\int_{a-h}^{a+h}\frac{\varepsilon\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}<\int_{a-h}^{a+h}\frac{\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}\leqq B\int_{a-h}^{a+h}\frac{\varepsilon\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}.$$

Or l'intégrale

$$\int_{a-h}^{a+h}\frac{\varepsilon\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}$$

est aisée à évaluer. En posant

$$u-a=\varepsilon t,$$

elle devient

$$\int_{-\frac{h}{\varepsilon}}^{\frac{h}{\varepsilon}} \frac{dt}{1+t^2},$$

et, lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives, h restant toujours fixe, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

L'intégrale

$$\int_{a-h}^{a+h} \frac{\varepsilon f(u)\,du}{(u-a)^2+\varepsilon^2}$$

est donc comprise, pour les valeurs de ε suffisamment voisines de zéro, entre

$$A\pi \quad \text{et} \quad B\pi.$$

Nous avons supposé jusqu'ici h fixe, mais il est clair que rien ne nous empêchait de l'avoir choisi aussi petit que nous voulions; la fonction $f(u)$ étant continue, A et B peuvent être supposés différer aussi peu que l'on veut de $f(a)$; il en résulte que l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} I = 2i\pi f(a),$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad f(a) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon=0} [F(-a-i\varepsilon) - F(-a+i\varepsilon)].$$

On voit ici la confirmation de ce que nous avions dit au sujet de la non-uniformité de $F(z)$ en tout point où $f(u)$ n'est pas nul; on voit aussi que, dans le cas où $f(z)$ est analytique, la fonction peut être prolongée au delà de la coupure, puisque la *mesure de sa non-uniformité* est $2i\pi f(z)$ fonction analytique, tandis qu'il n'en est certainement pas de même lorsque $f(u)$ n'est pas analytique.

Mais notre but principal était la détermination de $f(u)$ au moyen de $F(z)$; il est réalisé par la formule (5); cette détermination est d'ailleurs unique, et Stieltjes démontre que, dans le cas où nous nous trouvons, c'est-à-dire dans le cas où les c_n sont tels que la série

$$\sum a_n$$

est divergente, il n'y a pas d'autre fonction *positive* $f(u)$ vérifiant les relations (1).

La théorie précédente fait donc correspondre, dans des cas très étendus, à une série divergente une fonction analytique bien déterminée. Il est d'ailleurs aisé de démontrer que, si la somme, la différence, le produit de deux séries divergentes *sont tels que la théorie de Stieltjes s'y applique*, la fonction analytique qu'elle fournit est la somme, la différence, le produit des fonctions analytiques qui correspondent aux séries dont on est parti.

Il en est de même pour la dérivée d'une série, moyennant quelques hypothèses supplémentaires de continuité sur $f(u)$.

Ces divers points résulteront des développements du prochain paragraphe.

Ce que nous devons faire remarquer ici, c'est que, s'il est clair que la théorie s'applique à la somme de deux séries lorsqu'elle s'applique à ces deux séries, il n'en est point nécessairement de même pour la différence ni pour le produit. C'est là une lacune de la théorie de Stieltjes, qu'il est essentiel de combler pour en rendre les applications possibles ; ce sera l'objet du prochain paragraphe.

En terminant celui-ci, nous tenons à répéter ce que nous avons dit au début, c'est-à-dire à souhaiter que notre résumé, bien que sec et incomplet, ait assez intéressé le lecteur pour lui donner le désir d'étudier le Mémoire de Stieltjes.

La généralisation de la théorie de Stieltjes.

Nous avons vu que le problème de la détermination de la fonction $f(u)$, supposée positive, par les relations

$$(1) \qquad c_n = \int_0^\infty f(u)\,u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

est déterminé d'une manière unique, lorsque les c_n sont tels que la série

$$\sum a_n$$

soit divergente.

Pour abréger, nous dirons que, dans ce cas, les c_n satisfont *à* *la condition* S, et que la fonction $f(u)$ correspondante satisfait aussi *à la condition* S.

Étant donnée une fonction $f(u)$, il est important de savoir reconnaître si elle satisfait ou non à la condition S. « C'est là un problème, dit Stieltjes à la page 112 du Mémoire cité, qui présente quelques analogies avec celui qui consiste à décider de la convergence ou de la divergence d'une série donnée. On n'en peut guère donner une solution générale ; tout ce qu'on peut faire, c'est donner quelques règles qui permettent de répondre à cette question dans un certain nombre de cas particuliers. »

Il serait, en effet, aisé de montrer que, de même que pour la convergence et la divergence des séries, on ne peut espérer résoudre la question au moyen d'une infinité dénombrable de règles ; la difficulté ainsi mise en évidence paraît donc insoluble ; mais il importe d'observer qu'elle est plus apparente que réelle, comme d'ailleurs la difficulté analogue pour les séries.

En effet, bien que Paul du Bois-Reymond ait fourni un exemple d'une série convergente dont la convergence ne peut être démontrée par aucun des critères de Bertrand, on peut dire qu'*en pratique* ces critères suffisent, c'est-à-dire permettent d'étudier toutes les séries que l'on rencontre effectivement. Dès lors, si l'on a démontré une proposition pour toutes les séries dont la convergence peut être prouvée par l'un de ces critères, c'est-à-dire pour toute série telle que l'on ait, quel que soit n, pour quelque valeur de α,

$$|u_n| < \frac{1}{n \log n \log_2 n \log_3 n \ldots (\log_\alpha n)^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0),$$

on pourra appliquer cette proposition à toutes les séries que l'on rencontrera (après s'être assuré qu'elles satisfont bien à la condition requise), c'est-à-dire à toutes les séries sauf peut-être quelques rares exceptions, de sorte que cette proposition, en apparence très particulière, ne sera pas loin d'être tout à fait générale ([1]).

Il en est de même pour la condition S; dans l'impossibilité où

([1]) La nécessité de supposer, pour une démonstration, une série *plus convergente* qu'une série connue, au lieu de la supposer simplement convergente, est fréquente en Analyse. C'est à cela que revient au fond la notion de convergence uniforme, dont l'importance est si grande.

nous sommes de l'expliciter complètement, nous la remplacerons par une condition plus restrictive, mais sensiblement équivalente en pratique (de même que pour une série, l'hypothèse que sa convergence est démontrable par un des critères de Bertrand est, en pratique, sensiblement équivalente à l'hypothèse, théoriquement bien plus large, qu'elle est convergente).

Pour obtenir la condition plus restrictive dont nous venons de parler, nous utiliserons une proposition de Stieltjes, dont nous ne pouvons donner ici la démonstration, qui est intimement liée avec des parties fort étendues du Mémoire de Stieltjes.

Cette proposition, tout à fait analogue à une proposition fondamentale de la théorie des séries, est la suivante :

Si la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S, *toute fonction $f_1(u)$ telle que le rapport*

$$\frac{f_1(u)}{f(u)}$$

soit constamment inférieur à un nombre positif fixe, satisfait aussi à la condition S.

Il suffit dès lors de connaître une fonction particulière $f(u)$ satisfaisant à la condition S, pour obtenir *une règle* analogue aux règles de convergence que l'on déduit pour les séries de la comparaison avec les séries connues.

Or, si l'on suppose

$$f(u) = \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}},$$

on obtient, comme le montre Stieltjes,

$$a_n = \frac{1}{n};$$

la série

$$\sum_1^\infty a_n$$

est donc divergente et la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S. Comme on peut évidemment changer u en mu, m étant une constante, on obtient la proposition suivante : s'il existe des constantes A et m telles que l'on ait, quel que soit u,

$$f(u) < A e^{-m\sqrt{u}},$$

la fonction $f(u)$ satisfait à la condition S.

Nous remplacerons désormais la condition S par cette condition S' qui est plus restrictive [1], mais qui a l'avantage d'être plus explicite; on pourrait faire une théorie analogue à celle que nous allons exposer en remplaçant la condition S' par toute autre condition S'' comprise dans la condition S.

Nous supposons donc que $f(u)$ satisfait à la condition S'; nous supposerons aussi que les dérivées successives de $f(u)$

$$f'(u), \quad f''(u), \quad \ldots,$$

satisfont aussi à la condition S', au moins jusqu'à un certain ordre λ, que nous nous réservons de fixer ultérieurement, pour les besoins des applications. Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour lever la restriction fondamentale de Stieltjes, c'est-à-dire l'hypothèse que $f(u)$ est positive.

Étant donnée une fonction $\varphi(u)$, non nécessairement positive, nous dirons que c'est une *fonction de Stieltjes,* si la fonction positive

$$|\varphi(u)|$$

satisfait à la condition S', ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre λ. Nous allons prouver que, si l'on pose

$$(2) \qquad c_n = \int_0^\infty \varphi(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

ces relations déterminent complètement $\varphi(u)$, les c_n étant donnés, *si on leur ajoute la condition que $\varphi(u)$ doit être une fonction de Stieltjes.*

En effet, s'il existe une autre fonction de Stieltjes $\psi(u)$ satis-

---

[1] Cette condition n'est d'ailleurs pas *beaucoup plus* restrictive; en effet, si l'on a

$$f(u) > A e^{-mu^\lambda}, \qquad \lambda < \frac{1}{2},$$

$f(u)$ ne satisfait pas à la condition S.

faisant à ces relations, on obtiendra, comme à la page 67,

$$(3) \qquad 0 = \int_0^\infty \theta(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

en posant

$$\theta(u) = \varphi(u) - \psi(u).$$

D'ailleurs $\theta(u)$, différence de deux fonctions de Stieltjes, est visiblement une fonction de Stieltjes, c'est-à-dire qu'il existe des constantes A et m telles que l'on ait

$$(4) \qquad |\theta(u)| < A e^{-m\sqrt{u}}.$$

Mais il résulte des propositions de Stieltjes que la fonction positive

$$\varpi(u) = A e^{-m\sqrt{u}}$$

est telle que les relations

$$(5) \qquad \gamma_n = \int_0^\infty \varpi(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

ne peuvent être vérifiées (pour les mêmes valeurs des γ_n), par aucune autre fonction positive $\varpi_1(u)$. Or, si l'on pose

$$\varpi_1(u) = \varpi(u) - \theta(u),$$

il résulte de l'inégalité (4) que la fonction $\varpi_1(u)$ est positive, et des relations (3) et (5) que l'on a

$$\gamma_n = \int_0^\infty \varpi_1(u) u^n \, du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Il y a donc contradiction, à moins que $\theta(u)$ ne soit identiquement nulle, c'est-à-dire que $\varphi(u) = \psi(u)$, ce qui démontre notre proposition : *il ne saurait exister une fonction de Stieltjes* $\psi(u)$ *distincte de* $\varphi(u)$ *et vérifiant les relations* (2).

La série (divergente, sauf dans le cas exceptionnel signalé plus haut) que l'on déduit de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\, du}{z + u},$$

sera dite *une série de Stieltjes,* dans le cas où $\varphi(u)$ est *une fonction de Stieltjes.*

Malheureusement, le lien que la fraction continue établissait entre la série et l'intégrale, dans le cas où $\varphi(u)$ était supposé positif, n'existant plus ici, nous ne pouvons donner de méthode simple pour reconnaître qu'une série divergente donnée est une série de Stieltjes, et pour calculer la fonction $\varphi(u)$ correspondante [1]. On peut cependant démontrer à ce sujet plusieurs propositions intéressantes.

Tout d'abord on peut donner une condition nécessaire pour qu'une série soit une série de Stieltjes; on a

$$c_n = \int_0^\infty \varphi(u) u^n \, du,$$

et

$$|\varphi(u)| = \mathrm{A}\, e^{-m\sqrt{u}};$$

on en conclut

$$|c_n| < \int_0^\infty \mathrm{A}\, e^{-m\sqrt{u}} u^n \, du,$$

d'où, en posant

$$u = \frac{t^2}{m^2},$$

$$|c_n| < \frac{2\mathrm{A}}{m^{2n+2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{2n+1} \, dt < \mathrm{B}(2n+1)!,$$

B étant une constante. Telle est la condition *nécessaire* à laquelle doivent satisfaire ces c_n pour que la série

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} - \frac{c_3}{z^3} + \ldots,$$

puisse être une série de Stieltjes.

Une autre proposition est la suivante : *Pour qu'une série soit une série de Stieltjes, il faut et il suffit* [2] *qu'elle puisse se mettre sous la forme de la différence de deux séries analogues, à chacune desquelles corresponde une fraction continue de Stieltjes convergente.*

---

[1] *Voir* la Note de la page 154.

[2] En réalité, la condition n'est pas absolument suffisante; elle entraîne seulement que la fonction $\varphi(u)$ qui correspond à la série satisfait à la condition S, mais non à la condition S'; mais, comme la connaissance des fractions continues permet de former cette fonction $\varphi(u)$, il est aisé de voir ce qu'il en est.

En effet, si l'on pose

$$f(u) = \frac{\varphi(u) + |\varphi(u)|}{2},$$

$$f_1(u) = \frac{-\varphi(u) + |\varphi(u)|}{2},$$

les fonctions $f(u)$ et $f_1(u)$ sont manifestement toutes deux positives (ou du moins ne sont jamais négatives), et l'on a

$$\varphi(u) = f(u) - f_1(u),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u} = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u} - \int_0^\infty \frac{f_1(u)\,du}{z+u}.$$

Il suffit de remplacer chaque intégrale par la série correspondante pour avoir notre proposition; car, bien évidemment, pour que $\varphi(u)$ satisfasse à la condition S, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour $f(u)$ et $f_1(u)$.

Mais nous avons hâte d'arriver aux propositions fondamentales qui sont la base des applications de la théorie : ce sont les propositions relatives à la possibilité d'appliquer aux séries de Stieltjes les opérations fondamentales de l'Algèbre et de l'Analyse : addition, soustraction, multiplication (¹), différentiation.

Relativement à l'addition et à la soustraction, nulle difficulté : il est clair que la somme ou la différence de deux séries de Stieltjes est aussi une série de Stieltjes.

Occupons-nous maintenant de la différentiation, plus facile à traiter que la multiplication.

Soit

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u}$$

avec

$$c_n = \int_0^\infty \varphi(u) u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

de sorte que l'on a le développement divergent

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots.$$

(¹) On pourrait déduire, dans des conditions déterminées, une règle de division de la règle de multiplication; mais nous n'en aurons pas besoin et les conditions restrictives à introduire seraient d'ailleurs une gène.

Je dis que la série

$$F'(z) = -\frac{c_0}{z^2} + \frac{2c_1}{z^3} - \frac{3c_2}{z^4} + \frac{4c_3}{z^5} - \ldots \tag{6}$$

est aussi une série de Stieltjes, qui représente bien la dérivée de $F(z)$.

On a, en effet,

$$F'(z) = -\int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{(z+u)^2}.$$

D'où, en intégrant par parties,

$$F'(z) = \left[\frac{\varphi(u)}{z+u}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\varphi'(u)\,du}{z+u},$$

c'est-à-dire

$$F'(z) = \frac{-\varphi(0)}{z} - \int_0^\infty \frac{\varphi'(u)\,du}{z+u}.$$

On voit que le développement de $F'(z)$ fournira une série de Stieltjes, puisque l'on suppose que $\varphi'(u)$ est une fonction de Stieltjes. Posons

$$F'(z) = \frac{\gamma_0}{z} - \frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z_3} - \frac{\gamma_3}{z_4} + \ldots. \tag{7}$$

On a

$$\gamma_0 = -\varphi(0) - \int_0^\infty \varphi'(u)\,du = -\varphi(0) + \varphi(0) = 0.$$

Puis

$$\gamma_n = -\int_0^\infty u^n \varphi'(u)\,du \qquad (n > 0),$$

c'est-à-dire, en intégrant par parties,

$$\gamma_n = -[u^n\varphi(u)]_0^\infty + \int_0^\infty n u^{n-1}\varphi(u)\,du = nc_{n-1}.$$

Les développements (6) et (7) coïncident donc.

C. Q. F. D.

Il nous reste à prouver que le produit de deux séries de Stieltjes est une série de Stieltjes.

Dans ce but, désignons par $f(u)$ et $\varphi(u)$ deux fonctions de

Stieltjes et posons

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u},$$

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{\varphi(u)\,du}{z+u}.$$

Soient, d'ailleurs,

$$c_n = \int_0^\infty f(u)u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\gamma_n = \int_0^\infty \varphi(u)u^n\,du \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

de sorte que les développements formels de $F(z)$ et de $\Phi(z)$ sont

$$F(z) = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots,$$

$$\Phi(z) = \frac{\gamma_0}{z} - \frac{\gamma_1}{z^2} + \frac{\gamma_2}{z^3} - \frac{\gamma_3}{z^4} + \ldots.$$

Il s'agit de prouver que l'on a

$$F(z)\Phi(z) = \frac{c_0\gamma_0}{z^2} - \frac{c_0\gamma_1 + c_1\gamma_0}{z^3} + \frac{c_0\gamma_2 + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_0}{z^4} - \ldots,$$

c'est-à-dire que le produit par z de la série du second membre est une série de Stieltjes, telle que l'intégrale correspondante

$$\int_0^\infty \frac{\theta(u)\,du}{z+u}$$

soit égale à $zF(z)\Phi(z)$. En d'autres termes, l'on doit prouver qu'il existe une fonction $\theta(u)$ telle que l'on ait

$$zF(z)\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{\theta(u)\,du}{z+u},$$

$$c_0\gamma_n + c_1\gamma_{n-1} + c_2\gamma_{n-2} + \ldots + c_n\gamma_0 = \int_0^\infty \theta(u)u^n\,du$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Les expressions de $F(z)$ et de $\Phi(z)$ donnent immédiatement

$$zF(z)\Phi(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{z f(u)\varphi(v)\,du\,dv}{(z+u)(z+v)}.$$

On a remplacé, dans l'expression de $\Phi(z)$, la variable d'intégration u par v, afin de pouvoir écrire sans confusion l'intégrale double. Nous allons maintenant transformer cette intégrale.

On a

$$\frac{z}{(z+u)(z+v)} = \frac{1}{v-u}\left(\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u}\right),$$

de sorte que, si l'on désigne, pour abréger, l'intégrale par J, on peut écrire

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{v-u}\left(\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u}\right) f(u)\varphi(v)\,du\,dv.$$

L'intégrale J a un sens, malgré la présence du facteur $v-u$ en dénominateur, puisque ce facteur se retrouverait en numérateur dans la parenthèse. Mais il n'en serait plus de même si l'on décomposait l'intégrale J en deux autres, en séparant les deux termes de la parenthèse; chacune de ces intégrales serait dépourvue de sens.

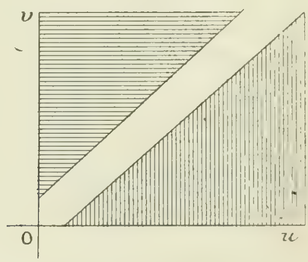
Pour éviter cette difficulté, nous allons modifier l'expression de J; traçons deux axes rectangulaires Ou, Ov, et figurons les deux droites

$$u - v = \pm\varepsilon,$$

ε étant une constante positive.

Nous désignerons par D_ε le domaine obtenu en supprimant de la portion du plan pour laquelle les coordonnées u, v sont toutes deux positives, la bande comprise entre ces deux droites. Ce domaine D_ε est couvert de hachures sur la *fig.* 11.

Fig. 11.



Cela posé, on a visiblement

$$J = \lim_{\varepsilon=0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{f(u)\varphi(v)}{v-u}\left(\frac{v}{z+v} - \frac{u}{z+u}\right) du\,dv.$$

On peut dès lors écrire

$$J = J_1 - J_2,$$

avec

$$J_1 = \lim_{\varepsilon = 0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{v f(u) \varphi(v)}{(v-u)(z-v)} \, du \, dv,$$

$$J_2 = \lim_{\varepsilon = 0} \int\int_{D_\varepsilon} \frac{u f(u) \varphi(v)}{(u-v)(z-u)} \, du \, dv,$$

en supposant toutefois que les limites existent, ce que nous allons incessamment vérifier. Les intégrales doubles considérées ont, en effet, un sens, tant que ε n'est pas nul, puisque la droite $u = v$ est en dehors du champ d'intégration.

Occupons-nous d'abord de J_1.

Posons

$$J_1(\varepsilon) = \int\int_{D_\varepsilon} \frac{v f(u) \varphi(v) \, du \, dv}{(v-u)(z-v)}.$$

On a évidemment

$$J_1(\varepsilon) = \int_0^\infty - \frac{v \varphi(v)}{z - v} \left(\int_0^{v-\varepsilon} + \int_{v+\varepsilon}^\infty \frac{f(u) \, du}{u - v} \right) dv.$$

Nous devons d'abord calculer la somme d'intégrales (¹)

$$\int_0^{v-\varepsilon} + \int_{v+\varepsilon}^\infty \frac{f(u) \, du}{u - v}.$$

Or, on a évidemment

$$\int \frac{f(u) \, du}{u - v} = f(u) \log(u - v) - \int f'(u) \log(u - v) \, du$$

et aussi

$$\int \frac{f(u) \, du}{u - v} = f(u) \log(v - u) - \int f'(u) \log(v - u) \, du.$$

On en conclut que la somme d'intégrales cherchée est égale à

$$f(v - \varepsilon) \log \varepsilon - f(0) \log v - f(v + \varepsilon) \log \varepsilon$$
$$- \int_0^{v-\varepsilon} f'(u) \log(v - u) \, du - \int_{v+\varepsilon}^\infty f'(u) \log(u - v) \, du.$$

(¹) On peut remarquer que cette somme est précisément ce que Cauchy appelle *valeur principale* de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{f(u) \, du}{u - v}.$$

car $f(\infty)$ est nul. Or le produit

$$[f(v-\varepsilon)-f(v+\varepsilon)]\log\varepsilon$$

tend visiblement vers zéro avec ε, puisque la fonction $f(u)$ admet une dérivée. On a donc finalement

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{v-\varepsilon}+\int_{v+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(u)\,du}{u-v}=-f(0)\log v-\int_0^{\infty}f'(u)\frac{\log(u-v)^2}{2}\,du,$$

car l'intégrale a maintenant un sens, bien que le facteur

$$\frac{1}{2}\log(u-v)^2$$

(auquel on doit donner son sens arithmétique) devienne infini pour $u=v$.

On obtient ainsi, en posant,

$$f(0)\log v+\int_0^{\infty}f'(u)\frac{\log(u-v)^2}{2}\,du=\mu(v),$$

la formule

$$\lim_{\varepsilon=0}J_1(\varepsilon)=J_1=\int_0^{\infty}\frac{v\varphi(v)\mu(v)\,dv}{z+v}.$$

De même, en posant

$$\varphi(0)\log u+\int_0^{\infty}\varphi'(v)\frac{\log(u-v)^2}{2}\,dv=m(u),$$

l'on aura

$$J_2=\int_0^{\infty}\frac{uf(u)m(u)\,du}{z+u}.$$

On a donc finalement

$$J=J_1+J_2=\int_0^{\infty}u\frac{f(u)m(u)+\varphi(u)\mu(u)}{z+u}\,du.$$

Il est aisé de voir que la fonction

$$\theta(u)=u[f(u)m(u)+\varphi(u)\mu(u)]$$

est une fonction de Stieltjes, en même temps que $f(u)$ et $\varphi(u)$; il suffit pour cela de remarquer que l'on a aisément des limites supérieures des intégrales qui figurent dans les expressions de $m(u)$ et de $\mu(u)$; quant aux facteurs $\log u$, ils sont pour $u=0$ détruits par le facteur u qui figure en dehors des crochets; on voit dès lors immédiatement que si l'on a

$$|f(u)| < \mathrm{A}e^{-m\sqrt{u}},$$
$$|\varphi(u)| < \mathrm{A}e^{-m\sqrt{u}},$$

l'on a aussi, pour u assez grand,

$$|\theta(u)| < e^{-m'\sqrt{u}},$$

pourvu que m' soit inférieur à m : et, comme $\theta(u)$ est toujours fini, il existe un nombre A' tel que l'on ait, quel que soit u,

$$|\theta(u)| < \mathrm{A}'e^{-m'\sqrt{u}}.$$

La première partie de notre proposition est donc démontrée : il est prouvé que le produit $z\mathrm{F}(z)\Phi(z)$ est une série de Stieltjes; il s'agit maintenant de faire voir que cette série s'obtient en multipliant les séries $z\mathrm{F}(z)$ et $\Phi(z)$. On pourrait le vérifier en calculant directement les intégrales

$$\int_0^{\infty} \theta(u)u^n\,du,$$

calcul un peu long, mais sans difficulté. Il vaut mieux remarquer que cette vérification est inutile, car, comme nous avons déjà eu l'occasion de le rappeler, les règles du calcul sont indépendantes de la valeur numérique des lettres sur lesquelles on opère; or dans le cas particulier où les séries $\mathrm{F}(z)$ et $\Phi(z)$ sont convergentes, c'est-à-dire où $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont nulles pour u assez grand, il est clair que la vérification doit s'effectuer; l'hypothèse que $f(u)$ et $\varphi(u)$ sont nulles pour u assez grand n'y interviendra d'ailleurs pas, puisque les intégrales sont prises jusqu'à l'infini et que, dans tous les cas, non seulement $f(u)$ et $\varphi(u)$ mais les produits $u^n f(u)$ et $u^n\varphi(u)$ s'annulent à l'infini.

Le calcul de vérification est donc inutile et notre proposition se trouve complètement démontrée.

On peut résumer les diverses propositions précédentes en un seul énoncé :

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *des séries de Stieltjes et*

$$\Psi(y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \ldots, y''_n),$$

un polynome par rapport à ces fonctions et à leurs dérivées;

ce polynome est une série de Stieltjes, que l'on obtient en calculant sur les séries comme si elles étaient convergentes.

Il est manifeste qu'une série de Stieltjes ne peut représenter zéro que si tous ses coefficients sont nuls; en effet, la fonction

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{f(u)\,du}{z+u}$$

ne peut être identiquement nulle que si $f(u)$ est identiquement nulle et dès lors tous les c_n sont nuls; d'autre part la seule fonction de Stieltjes qui corresponde à des c_n tous nuls est évidemment une fonction identiquement nulle.

On peut donc ajouter à l'énoncé précédent que *l'on aura*

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n^{(\lambda)}) = 0,$$

dans le cas et dans le cas seulement où la série de Stieltjes obtenue pour Φ *est identiquement nulle.*

Enfin, tout ce qui précède s'étend sans difficulté au cas où les coefficients du polynome Φ au lieu d'être constants sont des polynomes en z; on peut, en effet, en divisant par une puissance convenable de z, avoir pour coefficients des polynomes en $\frac{1}{z}$ lesquels peuvent être considérés comme des cas particuliers des séries de Stieltjes (¹).

On peut dès lors énoncer, en particulier, la proposition suivante, sur laquelle nous croyons devoir attirer l'attention :

Soit

$$f(z, y, y', y'', \ldots, y^{(\lambda)}),$$

une équation différentielle algébrique et

$$y = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots$$

une série divergente qui la vérifie formellement; si cette série est une série de Stieltjes, elle définit une intégrale de l'équation différentielle. Car, l'équation différentielle étant vérifiée formellement par la série y, la fonction de Stieltjes obtenue par

(¹) Observons en passant que l'ordre de dérivation, laissé indéterminé p. 74, devra être au moins égal à l'ordre de dérivation le plus élevé λ qui figure dans Φ.

cette substitution a tous ses coefficients nuls et est par suite identiquement nulle; c'est-à-dire que la substitution de la fonction y rend identiquement nul le premier membre de l'équation différentielle; c'est-à-dire que y est une intégrale.

Pour donner un exemple, considérons la série dont il a déjà été question page 55 :

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1.2}{z^3} - \frac{1.2.3}{z^4} + \ldots;$$

c'est visiblement une série de Stieltjes.

Il est aisé de former une équation différentielle à laquelle satisfait formellement y; on a, en effet

$$y' = \frac{-1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{1.2.3}{z^4} + \frac{1.2.3.4}{z^5} - \ldots,$$

c'est-à-dire

$$y' = y - \frac{1}{z}.$$

Il résulte de ce qui précède que la fonction y, c'est-à-dire l'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{z+u}$$

vérifie cette équation différentielle, ce qu'il est d'ailleurs très aisé de vérifier.

Les fonctions de Stieltjes nous fournissent ainsi un premier exemple d'utilisation des séries divergentes pour l'intégration effective des équations différentielles, c'est-à-dire pour la détermination précise de leurs intégrales au moyen d'un développement divergent.

Malheureusement, le champ des applications de la théorie précédente ne peut être qu'assez restreint, puisque les séries de Stieltjes ne sont aptes qu'à représenter des fonctions analytiques admettant comme unique singularité un segment rectiligne [1], c'est-à-dire une classe de fonctions en somme très particulière. C'est donc seulement aux équations différentielles admettant une

[1] Un changement simple de variable permet de supposer ce segment quelconque; on pourrait aussi le remplacer sans difficulté par un arc de cercle.

intégrale de cette nature que la théorie qui vient d'être développée a chance de pouvoir s'appliquer.

Néanmoins, les recherches de Stieltjes sont fort importantes, au point de vue des idées que l'on peut chercher à se former sur les séries divergentes en général; mais il y aurait lieu de ne pas se contenter de la généralisation que nous venons d'en donner et de chercher à les étendre dans d'autres directions. Pour y arriver, la méthode la plus sûre consisterait peut-être à chercher à démontrer les propositions même de Stieltjes par des méthodes plus générales. On aura ainsi des démonstrations probablement plus longues que les siennes, qui sont fort ingénieuses et qui paraissent aussi simples que possible pour le cas particulier traité, mais ces démonstrations plus longues auraient sans doute l'avantage de s'étendre sans effort à des cas plus généraux.

CHAPITRE III.

LA THÉORIE DES SÉRIES SOMMABLES.

Les méthodes basées sur les valeurs moyennes.

Nous avons déjà, à propos de la série d'Euler,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

indiqué que plusieurs géomètres ont invoqué, comme argument destiné à prouver que la série est égale à $\frac{1}{2}$, la remarque suivante : on obtient comme somme 1 ou 0, suivant que l'on prend un nombre impair ou pair de termes; ces deux sommes s'obtenant ainsi aussi souvent l'une que l'autre, il est naturel de regarder la série comme égale à leur moyenne arithmétique $\frac{1}{2}$.

Ce raisonnement est évidemment complètement dépourvu de rigueur; il constitue cependant une induction intéressante, qui s'est trouvée justifiée, dans un cas assez étendu, par la proposition de M. Frobenius que nous avons signalée page 5.

Mais la première application, d'un caractère général, de la méthode de la moyenne arithmétique paraît due à M. Cesàro [1]. Elle est relative à la multiplication des séries. On sait que, étant données deux séries convergentes

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{1}$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots, \tag{2}$$

Cauchy nous a appris à mettre leur produit sous la forme

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots. \tag{3}$$

D'ailleurs, on a démontré que sous des conditions très larges,

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIV, 1890.

Voir aussi CESARO, *Sulla determinazione assintotica delle serie di potenze* (*Rendiconti della R. Accademia delle Science fisiche e matematiche di Napoli*; 28 ottobre 1893).

qu'il est inutile de rappeler ici ([1]), la série (3) est effectivement le produit des séries (1) et (2).

Néanmoins, lorsque les séries (1) et (2) ne convergent absolument ni l'une ni l'autre, il peut arriver que la série (3) soit divergente; dans ce cas, il semble que la multiplication des séries soit impossible.

M. Cesàro étudie ces séries divergentes particulières (3) qui résultent du produit de deux séries convergentes et il montre que ces séries appartiennent à la classe des séries qu'il appelle *simplement indéterminées,* c'est-à-dire sont telles que si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes, le rapport

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

tend vers une limite s qu'il appelle la *somme* de la série ([2]).

La somme, ainsi définie, de la série (3) *est, même lorsque cette série est divergente, égale au produit des sommes des séries* (1) et (2). Telle est la proposition fondamentale de M. Cesàro dont la démonstration est d'ailleurs fort simple.

Posons, pour abréger,

$$u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0 = w_n,$$

de sorte que la série (3) s'écrive

$$(3)' \qquad w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots.$$

Posons d'ailleurs

$$\mathrm{U}_n = \sum_0^n u_i,$$

$$\mathrm{V}_n = \sum_0^n v_i,$$

$$\mathrm{W}_n = \sum_0^n w_i.$$

On a visiblement

$$\mathrm{W}_n = u_0 \mathrm{V}_n + u_1 \mathrm{V}_{n-1} + u_2 \mathrm{V}_{n-2} + \ldots + u_n \mathrm{V}_0.$$

([1]) *Voir* notamment MERTENS, *Journal de Crelle,* t. 79, p. 182; PRINGSHEIM, *Math. Annalen,* t. XXI, p. 327.

([2]) Une application intéressante des séries simplement indéterminées a été donnée récemment par M. LÉOPOLD FEJER, *Sur les fonctions bornées et intégrables* (*Comptes rendus,* 10 décembre 1900).

Il en résulte

$$W_0 + W_1 + \ldots + W_n = U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \ldots + U_n V_0$$

et, par suite,

$$\frac{W_0 + \ldots + W_n}{n+1} = \frac{U_0 V_n + \ldots + U_n V_0}{n+1}.$$

Par hypothèse U_n tend vers une limite U et V_n vers une limite V ; tout revient à démontrer que l'expression

$$\frac{U_0 V_n + \ldots + U_n V_0}{n+1}$$

tend, pour n infini, vers la limite UV.

Les U_n et les V_n tendant vers une limite il existe un nombre A tel que l'on ait, quel que soit n,

$$|U_n| < A, \quad |V_n| < A.$$

D'autre part si nous donnons un nombre ε, on pourra déterminer un nombre p assez grand pour que les relations

$$\alpha > p,$$
$$\beta > p,$$

entraînent

$$|U_\alpha V_\beta - UV| < \varepsilon ;$$

c'est une conséquence évidente du fait que les nombres U_n et V_n ont pour limites respectives U et V.

Cela posé, choisissons un nombre n supérieur à $2p$; la fraction

$$\frac{U_0 V_n + U_1 V_{n-1} + \ldots + U_n V_0}{n+1}$$

pourra être décomposée en trois parties

$$\frac{U_0 V_n + \ldots + U_{p-1} V_{n-p+1}}{n+1},$$

$$\frac{U_p V_{n-p} + \ldots + U_{n-p} V_p}{n+1},$$

$$\frac{U_{n-p+1} V_{p-1} + \ldots + U_n V_0}{n+1}.$$

La première et la troisième parties sont respectivement inférieures, en valeur absolue, à

$$2\,\frac{pA^2}{n+1} ;$$

car chaque terme du numérateur est inférieur à A^2, en valeur absolue; on peut représenter leur somme par

$$2\theta\frac{pA^2}{n+1}$$

avec (1)

$$-1 < \theta < 1.$$

Quant à la seconde partie elle est égale à

$$(n+1-2p)(UV+\theta'\varepsilon),$$

en supposant encore

$$-1 < \theta' < 1,$$

puisque chacun des termes du numérateur est égal à $UV+\theta''\varepsilon$.

On a donc finalement

$$\frac{U_0V_n+\ldots+U_nV_0}{n+1} = \frac{2\theta pA^2}{n+1} + \frac{n+1-2p}{n}(UV+\theta'\varepsilon).$$

On voit que si, en laissant p fixe, on fait croître n indéfiniment, on peut déterminer un nombre m tel que, pour $n > m$, le second membre soit compris entre

$$UV - 2\varepsilon \quad \text{et} \quad UV + 2\varepsilon.$$

Or le nombre ε a pu être choisi aussi petit que l'on veut; le premier membre a donc pour limite UV lorsque n augmente indéfiniment et la proposition de M. Cesàro est démontrée.

Nous ne nous étendrons pas sur l'extension donnée par M. Cesàro à sa proposition par la définition de séries 2, 3, ..., r fois indéterminées. La somme de ces séries s'obtient toujours en prenant la moyenne des sommes $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de 1, 2, 3, ..., n termes et en cherchant la limite de cette moyenne pour n infini. Mais, pour prendre cette moyenne on affecte chaque somme d'un *poids* convenable, c'est-à-dire qu'au lieu de considérer simplement l'expression

$$\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}$$

---

(1) Nous supposons ici les u et v réels; il n'y aurait aucune difficulté à les supposer imaginaires.

on considère la suivante

$$\frac{a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_n s_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

dans laquelle les a sont des nombres positifs convenablement choisis, qui dépend à la fois du rang n et de l'ordre d'indétermination r de la série.

M. Cesàro démontre la proposition suivante : *Le produit d'une série p fois indéterminée par une série q fois indéterminée est une série qui est, au plus, $p+q+1$ fois indéterminée.* Cette série produit peut donc être calculée par les méthodes de M. Cesàro.

En particulier, le produit de p séries convergentes est une série au plus $p-1$ fois indéterminée et sa somme peut donc être toujours calculée ([1]).

On voit combien sont intéressants les résultats de M. Cesàro; une classe étendue de séries divergentes, déduites de calculs effectués sur des séries convergentes, c'est-à-dire se présentant naturellement dans les applications, peut être sommée par une méthode simple. Malheureusement, le champ d'extension de ces méthodes est, malgré tout, assez limité; si l'on considère le produit de deux séries convergentes, que nous écrivons, comme plus haut,

$$w_0 + w_1 + \ldots + w_n + \ldots$$

avec

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0,$$

il suffit de remarquer que u_n et v_n tendent vers zéro pour n infini, pour conclure qu'il en est de même du quotient

$$\frac{w_n}{n}.$$

On verrait de même que si l'on désigne par

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$$

le produit de $p+1$ séries convergentes, effectué d'après la règle

([1]) Il importe de remarquer que si une série est moins de r fois indéterminée, il n'y a aucun inconvénient, pour trouver sa somme, à lui appliquer la méthode qui convient aux séries r fois indéterminées.

de Cauchy, le quotient

$$\frac{x_n}{n^p}$$

tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Les séries divergentes obtenues par la multiplication d'un nombre quelconque de séries convergentes satisfont donc à la condition suivante : *il existe un nombre p tel que l'on ait, pour n assez grand,*

$$|x_n| < n^p.$$

Dès lors les séries divergentes qui sont telles que, quel que soit p, il existe une infinité de valeurs de n telles que l'on ait

$$|x_n| > n^p,$$

ne rentrent pas dans la catégorie précédente. Telle est, par exemple, la série

$$1 - 2 + 4 + 8 - 16 + 32, \quad \ldots.$$

Il n'en résulte d'ailleurs pas nécessairement que les méthodes de M. Cesàro ne puissent s'appliquer à ces séries; mais il est aisé de voir directement que, lorsque s_n est une fonction de n croissant assez rapidement, les moyennes de M. Cesàro ne peuvent tendre vers aucune limite et que, par suite, sa méthode ne saurait être applicable.

Il y a donc lieu, si l'on veut étendre la catégorie des séries sommables, d'apporter à la méthode des moyennes des modifications notables.

Voici comment on peut procéder.

Soit

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

la série proposée; nous posons

$$\begin{array}{l} s_0 = u_0, \\ s_1 = u_0 + u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

La forme la plus générale d'une moyenne entre les nombres s_0,

$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ est la suivante

$$\frac{a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n + \ldots}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots},$$

dans laquelle les a_n sont des nombres réels *non négatifs*. D'ailleurs, certains d'entre eux pourraient être supposés nuls; par exemple M. Cesàro prend, pour les séries une fois indéterminées

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 1,$$

$$a_{n+p} = 0, \qquad p > 0,$$

et il fait ensuite croître n indéfiniment.

D'ailleurs il est naturel de supposer que les deux séries

$$\Sigma a_n s_n,$$

$$\Sigma a_n$$

sont convergentes, sinon on serait ramené au problème même que l'on veut traiter [1].

Dès lors, dans le cas où les s_n croissent rapidement avec n, il est nécessaire de supposer que les a_n décroissent rapidement. Mais, d'autre part, si les a_n décroissent très rapidement, on attribue des poids très faibles aux sommes dont le rang est le plus élevé, et ce sont précisément ces sommes de rang élevé qui sont importantes dans l'étude des séries.

Pour résoudre cette difficulté, on peut employer le procédé suivant :

On prendra une suite doublement infinie de nombres positifs a

(1) $\qquad a_0^{(1)},\ a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ \ldots,\ a_q^{(1)},\ \ldots$

(2) $\qquad a_0^{(2)},\ a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ \ldots,\ a_q^{(2)},\ \ldots$

. . . .

(p) $\qquad a_0^{(p)},\ a_1^{(p)},\ \ldots,\ \ldots,\ a_q^{(p)},\ \ldots$

. . . .

---

[1] Cette hypothèse n'est cependant pas indispensable, car les séries *divergentes*

$$\Sigma a_n s_n,$$

$$\Sigma a_n$$

pourraient être plus faciles à étudier que la série proposée Σu_n.

Mais on est ainsi amené à des complications dont l'étude nous entraînerait trop loin.

Dans chaque ligne, les a décroîtront très rapidement à partir d'une certaine valeur de n; *mais cette valeur de n croîtra avec p*, de sorte que, dans chaque colonne, on pourra supposer que $a_n^{(p)}$ croît indéfiniment avec p.

Dès lors, si l'on forme la moyenne des sommes s_n, en prenant comme poids successivement les nombres (1), (2), ..., (p), ..., on sera amené à prendre comme valeur de la somme l'expression

$$\lim_{p=\infty} \frac{\Sigma a_n^{(p)} s_n}{\Sigma a_n^{(p)}}.$$

D'ailleurs les séries

$$\Sigma a_n^{(p)} s_n,$$
$$\Sigma a_n^{(p)},$$

seront convergentes [1], puisque, lorsque p est fixe, $a_n^{(p)}$ décroît rapidement à partir d'une certaine valeur de n et que la convergence d'une série ne dépend que de ses derniers termes. Mais d'autre part, lorsque p augmente indéfiniment il en est de même de $a_n^{(p)}$ pour chaque valeur fixe de n et par suite les sommes s_n de rang élevé finissent par jouer un rôle important dans la moyenne.

Pour appliquer la méthode précédente, il est naturel de supposer les $a_n^{(p)}$ liés entre eux par des lois simples, afin de ne pas avoir des expressions trop compliquées. Voici une hypothèse assez générale que l'on peut faire à leur sujet [2].

---

[1] A condition, bien entendu, que les s_n ne croissent pas trop vite; à chaque système de valeurs des $a_n^{(p)}$ correspond une classe de séries divergentes rendant convergentes les séries $\Sigma a_n^{(p)} s_n$.

[2] BOREL, *Sur la sommation des séries divergentes* (*Comptes rendus*, 30 décembre 1895). *Voir* aussi sur la théorie des séries sommables les Mémoires suivants : BOREL, *Sur la généralisation de la notion de limite et sur l'extension aux séries divergentes sommables du théorème d'Abel sur les séries entières* (*Comptes rendus*, 13 janvier 1896). *Applications de la théorie des séries divergentes sommables* (*Comptes rendus*, 7 avril 1896). *Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor* (*Comptes rendus*, 5 octobre 1896). *Sur les séries de Taylor* (*Comptes rendus*, 14 octobre 1896). *Les séries absolument sommables, les séries* (M) *et le prolongement analytique* (*Comptes rendus*, 19 novembre 1900). *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables* et *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* (*Journal de M. Jordan*, 1896). *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale*, 1899). — SERVANT, *Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor* (*Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 80, janvier 1899), et *Thèse : Essai sur les séries divergentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1899).

Désignons par

$$c_0, \quad c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots$$

des constantes positives telles que la série

$$\varphi(a) = c_0 + c_1 a + \ldots + c_n a^n + \ldots$$

soit convergente quel que soit a, ce qui revient à dire que $\varphi(a)$ est une fonction entière. Nous prendrons

$$a_n^{(p)} = c_n p^n;$$

de sorte que la somme de la série divergente sera définie par la relation

$$s = \lim_{p=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 p s_1 + \ldots + c_n p^n s_n + \ldots}{c_0 + c_1 p + \ldots + c_n p^n + \ldots}.$$

On peut d'ailleurs remplacer, pour plus de généralité, la variable discontinue p par la variable continue a et écrire

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \ldots + c_n a^n s_n + \ldots}{\varphi(a)}.$$

Nous n'étudierons pas le cas général où la fonction $\varphi(a)$ est quelconque; nous prendrons tout d'abord

$$\varphi(a) = e^a;$$

la méthode que nous venons d'exposer prendra alors le nom de *méthode de sommation exponentielle;* les séries auxquelles elle s'applique seront dites *sommables*. Nous étudierons ensuite brièvement le cas où l'on suppose

$$\varphi(a) = e^{a^p},$$

p étant un nombre entier.

Ce choix de la fonction exponentielle, comme fonction entière sommatrice, a été tout d'abord suggéré par le désir de simplifier les calculs et de faciliter les applications. Mais, en réalité, c'est pour des raisons bien plus profondes qu'il y a avantage à choisir la fonction exponentielle, ou des fonctions qui s'y rattachent d'une manière simple.

Les fonctions que l'on rencontre en Analyse, ou les suites indéfinies de nombres qui se présentent comme les coefficients de leurs développements en série, ont généralement un mode de croissance ou de variabilité assez *régulier,* c'est-à-dire se rattachant d'une manière assez simple à la croissance de la suite des nombres entiers; la définition même de la fonction fait connaître, en général, le lien qui existe entre ces deux modes de croissance. Par suite, on ne troublera pas la régularité du développement, si l'on multiplie chaque terme par une suite de nombres à croissance régulière, tandis qu'on le modifierait du tout au tout si l'on choisissait des nombres à croissance irrégulière (¹). Les considérations précédentes, forcément un peu vagues, peuvent faire comprendre qu'il existe des rapports étroits entre une série de Taylor à rayon de convergence fini

$$\Sigma a_n z^n$$

et la fonction entière que nous appellerons *fonction entière associée* (²)

$$\sum \frac{a_n z^n}{n!}.$$

En effet, dans le cas où la série de Taylor n'admet pas son cercle de convergence comme coupure, ce fait seul entraîne, comme nous le verrons, une certaine régularité dans la suite de ses coefficients; cette régularité subsiste dans les coefficients de la fonction entière et, comme c'est de la nature de cette régularité que dépendent les propriétés de la fonction, on conçoit que l'étude de la série de Taylor et celle de la fonction entière puissent se ramener l'une à l'autre, au moins en partie.

Mais nous allons laisser ces considérations générales, pour nous occuper particulièrement de la méthode de sommation exponentielle. Nous serons d'ailleurs amené à la transformer, c'est-à-dire à modifier l'expression analytique de la somme, de telle manière qu'il ne restera plus trace de la méthode des moyennes; nous avons tenu néanmoins à faire voir comment découlent de cette méthode les développements qui remplissent la fin de ce Chapitre et le Chapitre suivant.

(¹) Par exemple, on peut définir (*voir* mon *Mémoire sur les séries divergentes*) une fonction entière à coefficients tous positifs $\varpi(x)$ (et, par suite, croissante ainsi que toutes ses dérivées pour x réel et positif) telle que, pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment, elle soit aussi voisine que l'on veut, tantôt de e^x, tantôt de e^{x^2}; cette fonction et ses coefficients sont à croissance irrégulière.

(²) *Voir* page 99.

La méthode de sommation exponentielle.

Nous avons dit que l'on obtient la méthode de sommation exponentielle en supposant

$$\varphi(a) = e^a.$$

dans les formules de la page 95.

On obtient ainsi, pour définir la somme d'une série divergente, la relation

$$s = \lim_{a=\infty} \frac{s_0 + s_1 \frac{a}{1} + s_2 \frac{a^2}{1.2} + s_3 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots}{1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots}.$$

On peut dire aussi que la quantité s définie par cette relation est la *limite généralisée* de la suite

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots$$

Il est à peine utile d'observer que, si cette suite a effectivement une limite, le nombre s est égal à cette limite, c'est-à-dire que notre définition de la somme coïncide avec la définition ordinaire, lorsque la série proposée est convergente. Nous laisserons à nos lecteurs le soin de démontrer cette proposition ; ils n'y trouveront aucune difficulté.

Si nous posons

$$s(a) = s_0 + s_1 \frac{a}{1} + s_2 \frac{a^2}{1.2} + s_3 \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots$$

nous obtenons

$$s = \lim_{a=\infty} e^{-a} s(a).$$

Si l'on remarque que, pour $a = 0$, le produit $e^{-a}s(a)$ devient égal à u_0, on pourra écrire

$$s - u_0 = \left[e^{-a} s(a)\right]_0^\infty$$

en désignant par la notation $[f]_\alpha^\beta$ la différence des valeurs de la fonction f pour les valeurs β et α de la variable.

L'égalité précédente peut s'écrire

$$s - u_0 = \int_0^\infty \frac{d}{da}\left[e^{-a} s(a)\right] da;$$

or, on a

$$\frac{d}{da}\left[e^{-a}s(a)\right] = e^{-a}[s'(a) - s(a)];$$

et

$$s'(a) = s_1 + \frac{s_2 a}{1} + \frac{s_3 a^2}{1.2} + \frac{s_4 a^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Il en résulte

$$s'(a) - s(a) = s_1 - s_0 + \frac{(s_2 - s_1)a}{1} + \frac{(s_3 - s_2)a^2}{1.2} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$s'(a) - s(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1} + \frac{u_3 a^2}{1.2} + \frac{u_4 a^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Si nous posons

$$u_1(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1} + \frac{u_3 a^2}{1.2} + \ldots,$$

il vient

$$s - u_0 = \int_0^\infty e^{-a} u_1(a)\, da,$$

d'où, en intégrant par parties,

$$s - u_0 = \left[e^{-a}\int_0^a u_1(a)\, da\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-a}\left[\int_0^a u_1(a)\, da\right] da.$$

La partie tout intégrée est nulle; et si l'on remarque que l'on a

$$u_0 = \int_0^\infty u_0 e^{-a}\, da,$$

on obtient la formule définitive

$$s = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da, \tag{1}$$

dans laquelle on a posé

$$u(a) = u_0 + \int_0^a u_1(a)\, da,$$

c'est-à-dire

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3}{1.2.3} + \ldots. \tag{2}$$

La fonction $u(a)$ sera dite la *fonction entière associée* à la série proposée

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots. \tag{3}$$

Cette série doit, en effet, être supposée telle que les opérations que nous avons faites aient un sens; il en résulte en particulier cette conséquence que la série $u(a)$ doit converger pour toute valeur de a, c'est-à-dire représenter une fonction entière.

Nous dirons que la série (3) est sommable lorsque l'intégrale (1) aura un sens; cette intégrale définit alors la somme.

Mais l'étude des séries simplement sommables présente des difficultés analogues à l'étude des séries qui sont convergentes sans l'être absolument; nous la laisserons de côté, pour nous occuper exclusivement des séries *absolument sommables*, que nous allons définir.

Nous dirons que la série (3) *est absolument sommable si, non seulement l'intégrale* (1) *a un sens, mais s'il en est de même de l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-a}|u(a)|\,da, \tag{4}$$

et aussi des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a}|u^{\lambda}(a)|\,da, \tag{5}$$

dans lesquelles λ *désigne un indice de dérivation quelconque.*

On peut étendre les définitions précédemment données au cas où $u(a)$ n'est pas une fonction entière, mais représente une fonction analytique susceptible d'un prolongement analytique tout le long de l'axe réel, et ne présentant sur cet axe aucun point singulier.

Dès lors, *on dira que la série* (1) *est sommable, si les intégrales* (4) *et* (5) *ont un sens, les expressions* $u(a)$, $u^{\lambda}(a)$ *désignant maintenant, non plus la série* (2) *et ses dérivées, mais la fonction analytique définie par cette série et les dérivées de cette fonction* [1]. Néanmoins, pour simplifier, nous suppo-

---

[1] Il est nécessaire de supposer que la série (2) a un rayon de convergence différent de zéro. On pourrait chercher à étendre la théorie au cas où cette série a un rayon de convergence nul, mais est *sommable* et définit une fonction analytique sur l'axe réel; on aurait ainsi deux applications superposées de la méthode de sommation. Mais nous laisserons ce point de côté, ainsi que l'étude du cas où la fonction analytique $u(a)$ admet des points singuliers sur l'axe réel, mais peut être prolongée à l'infini dans d'autres directions.

serons le plus souvent que $u(a)$ est une fonction entière, omettant l'extension des propositions au cas plus général que nous venons de signaler.

Nous allons maintenant étudier les propriétés principales des séries *absolument sommables;* nous nous occuperons d'abord des séries dont les termes sont des constantes, puis des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable.

Faisons, en passant, une remarque évidente : *les séries convergentes sont toujours absolument sommables.*

Considérons maintenant une série divergente absolument sommable

$$(3) \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

et soit s sa somme. Nous allons montrer que *la série*

$$(6) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

est absolument sommable et a pour somme $s - u_0$.

En effet, les fonctions entières associées respectivement aux séries (3) et (6) sont

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$u'(a) = u_1 + \frac{u_2 a}{1} + \frac{u_3 a^2}{1.2} + \ldots.$$

La seconde est la dérivée de la première; les conditions fondamentales de sommabilité absolue sont donc vérifiées pour la série (6) lorsqu'elles le sont pour la série (3).

On a d'ailleurs, en désignant par s_1 la somme de la série (6),

$$s_1 = \int_0^\infty e^{-a} u'(a)\, da = [e^{-a} u(a)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da.$$

c'est-à-dire

$$s_1 = -u_0 + s,$$

ce qui est le résultat énoncé.

Comme on peut opérer sur la série (6) comme sur la série (3), c'est-à-dire en retrancher le premier terme, et répéter cette opération un nombre quelconque de fois, on en conclut que *la série*

$$(7) \qquad u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$$

est sommable et a pour somme

$$s - (u_0 + u_1 + \ldots + u_n).$$

Nous allons montrer maintenant que, réciproquement, *si la série* (6) *est sommable la série* (3) *est aussi sommable*. Il résultera alors de la proposition directe que, si l'on désigne par s et s' les sommes des séries (3) et (6), l'on a

$$s = s' + u_0.$$

Pour démontrer que la série (3) est sommable il faut prouver que l'intégrale

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-a} |u(a)|\, da$$

a un sens, lorsqu'on suppose que l'intégrale

$$(9) \qquad \int_0^\infty e^{-a} |u'(a)|\, da$$

en a un. Vu l'importance de cette proposition, nous allons entrer dans tous les détails de la démonstration, malgré sa facilité. On peut écrire, en négligeant la constante u_0,

$$u(a) = \int_0^a u'(a)\, da,$$

et l'on en conclut

$$|u(a)| \leqq \int_0^a |u'(a)|\, da.$$

Dès lors, si l'on pose

$$|u'(a)| = \varphi'(a),$$

$$\int_0^a |u'(a)|\, da = \varphi(a)$$

l'on a

$$|u(a)| \leqq \varphi(a).$$

Dès lors, pour prouver que l'intégrale (8) a un sens, il suffit de prouver que l'intégrale

$$(10) \qquad \int_0^\infty e^{-a} \varphi(a)\, da$$

en a un, étant supposé que l'intégrale

$$(9)' \qquad \int_0^\infty e^{-a} \varphi'(a)\, da,$$

qui n'est autre que l'intégrale (9), a un sens; les fonctions $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$ sont d'ailleurs essentiellement supposées positives.

Cette hypothèse, jointe à celle que l'intégrale $(9)'$ a un sens, a pour conséquence que le produit $e^{-a}\varphi'(a)$ tend vers zéro lorsque a augmente indéfiniment. On en conclut que, quel que soit le nombre ε donné d'avance, il existe un nombre a_1 tel que l'hypothèse

$$a > a_1,$$

entraîne

$$\varphi'(a) < \varepsilon e^{a}.$$

Désignons par a un nombre supérieur à a_1; l'on a

$$\varphi(a) - \varphi(a_1) = \int_{a_1}^{a} \varphi'(a)\,da < \varepsilon \int_{a_1}^{a} e^{a}\,da,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(a) < \varphi(a_1) + \varepsilon(e^{a} - e^{a_1}).$$

Dès lors, le nombre a_1 étant fixé, on peut trouver un nombre a_2 tel que l'hypothèse

$$a > a_2$$

entraîne

$$\varphi(a) < 2\varepsilon e^{a}.$$

Ainsi, le nombre ε étant quelconque, cette dernière inégalité est toujours vérifiée à partir d'une valeur assez grande de a; c'est dire que le produit $e^{-a}\varphi(a)$ tend vers zéro lorsque a augmente indéfiniment.

On a, d'ailleurs, en intégrant par parties,

$$\int_0^{a} e^{-a}\varphi(a)\,da = [-e^{-a}\varphi(a)]_0^a + \int_0^{a} e^{-a}\varphi'(a)\,da.$$

Lorsque a augmente indéfiniment, le premier terme du second membre, d'après la remarque qui vient d'être faite, a pour limite zéro, car $\varphi(0)$ est nul; quant au second terme, il a pour limite

$$\int_0^{\infty} e^{-a}\varphi'(a)\,da,$$

intégrale que nous avons supposée avoir un sens.

Donc le premier membre de l'égalité a une limite lorsque a

augmente indéfiniment, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_0^x e^{-a}\varphi(a)\,da$$

a un sens.

Notre proposition réciproque est donc démontrée.

Il résulte, en particulier, de l'ensemble des deux propositions, directe et réciproque, que *l'on peut, dans une série absolument sommable, intervertir le rang d'un nombre limité de termes, ou remplacer un certain nombre de termes consécutifs par leur somme, ou remplacer un terme par une somme de plusieurs autres, sans altérer, ni la sommabilité, ni la somme de la série.* Il est essentiel de remarquer que les opérations précédentes pourraient ne plus être légitimes, *si elles étaient effectuées une infinité de fois* (*voir* les remarques faites, p. 17).

Une autre propriété, qu'il suffira d'énoncer, des séries absolument sommables, est la suivante :

Si les séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

sont absolument sommables et ont respectivement pour sommes u, v, w, *et si l'on pose*

$$x_n = au_n + bv_n + cw_n \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

la série

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$$

est absolument sommable et a pour somme

$$x = au + bv + cw.$$

Une proposition analogue peut être énoncée pour la multiplication :

Si les séries

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sont absolument sommables et si l'on pose

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0,$$

la série

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

est absolument sommable et a pour somme

$$w = uv.$$

Pour démontrer cette proposition, nous poserons

$$u(a) = u_0 + \frac{u_1 a}{1} + \frac{u_2 a^2}{1.2} + \ldots,$$

$$v(b) = v_0 + \frac{v_1 b}{1} + \frac{v_2 b^2}{1.2} + \ldots$$

et nous aurons

$$u = \int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da,$$

$$v = \int_0^\infty e^{-b} v(b)\, db.$$

Il en résulte

$$uv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a-b} u(a) v(b)\, da\, db.$$

La transformation en intégrale double du produit des deux intégrales est d'ailleurs légitime, puisque, les séries étant supposées absolument sommables, ces intégrales conservent un sens lorsqu'on y remplace chaque élément par son module.

Nous transformerons l'expression du produit uv en posant

$$a + b = x,$$

$$a - b = y.$$

Il vient alors

$$uv = \int_0^\infty \left[\int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2} \right] e^{-x}\, dx.$$

Nous poserons

$$w(x) = \int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2}$$

et nous aurons

$$uv = \int_0^\infty e^{-x} w(x)\, dx,$$

cette intégrale ayant certainement un sens, puisque l'intégrale double en avait un. De plus, nous avons remarqué que l'intégrale double conservait un sens lorsqu'on y remplaçait chaque élément par son module; il en résulte que *l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-x}|w(x)|\,dx$$

a un sens.

Calculons l'expression de $w(x)$; l'on a

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right)=u_0+u_1\frac{x+y}{2.1}+u_2\frac{(x+y)^2}{2^2.1.2}+u_3\frac{(x+y)^3}{2^3.1.2.3}+\ldots,$$

$$v\left(\frac{x-y}{2}\right)=v_0+v_1\frac{x-y}{2.1}+v_2\frac{(x-y)^2}{2^2.1.2}+v_3\frac{(x-y)^3}{2^3.1.2.3}.$$

On en conclut

$$u\left(\frac{x+y}{2}\right)v\left(\frac{x-y}{2}\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}u_p v_q\frac{(x+y)^p(x-y)^q}{2^{p+q}p!\,q!}.$$

Or, il est aisé de calculer l'intégrale

$$\int_{-x}^{+x}(x+y)^p(x-y)^q\,dy.$$

En effet, l'intégration par parties donne

$$\int_{-x}^{+x}(x+y)^p(x-y)^q\,dy=\left[\frac{(x+y)^{p+1}(x-y)^q}{p+1}\right]_{-x}^{+x}+\frac{q}{p+1}\int_{-x}^{+x}(x+y)^{p+1}(x-y)^{q-1}\,dy.$$

La partie tout intégrée s'annule aux deux limites, et en répétant la même opération, on obtient finalement

$$\int_{-x}^{+x}(x+y)^p(x-y)^q\,dy=\frac{q(q-1)\ldots1}{(p+1)\ldots(p+q)}\int_{-x}^{+x}(x+y)^{p+q}\,dy,$$

c'est-à-dire

$$\int_{-x}^{+x}(x+y)^p(x-y)^q\,dy=\frac{q(q-1)\ldots1}{(p+1)\ldots(p+q)(p+q+1)}(2x)^{p+q+1}.$$

Cette expression est d'ailleurs symétrique en p et q; elle peut en effet s'écrire

$$\frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}(2x)^{p+q+1}.$$

Or on a

$$w(x) = \int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2},$$

on en conclut

$$w(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_p v_q \frac{1}{2^{p+q} p!\, q!} \frac{p!\, q!}{(p+q+1)!} (2x)^{p+q+1} \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$w(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} u_p v_q \frac{x^{p+q+1}}{(p+q+1)!},$$

ce qui peut s'écrire

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

en posant

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0.$$

Cette fonction $w(x)$ n'est pas précisément la fonction entière associée à la série w, elle est associée à la série

$$(\alpha) \qquad 0 + w_0 + w_1 + \ldots.$$

Or, comme nous ne savons pas si cette série est *absolument* sommable, nous ne pouvons affirmer que la série w est sommable en même temps qu'elle, ni que sa somme est la même, dans le cas où elle serait sommable. En effet, nous avons seulement prouvé que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |w(x)|\, dx$$

a un sens, mais nous ne savons rien sur les intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |w^{(\lambda)}(x)| \qquad (\lambda \geq 1).$$

Il est d'ailleurs naturel que nous n'ayons pu démontrer encore complètement notre théorème, car nous ne nous sommes pas servis du fait que les intégrales

$$\int_0^{\infty} e^{-a} |u^{(\lambda)}(a)|\, da,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a} |v^{(\lambda)}(a)|\, da$$

ont un sens, pour $\lambda \geq 1$.

Pour arriver à la démonstration complète nous remarquerons que, si l'on multiplie les deux séries absolument sommables

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

on obtient la série

$$u_1 v_0 + (u_2 v_0 + u_1 v_1) + (u_3 v_0 + u_2 v_1 + u_1 v_2) + \ldots.$$

Désignons par $\theta(x)$ la fonction entière qui est dans la même relation avec cette série que la série $w(x)$ avec la série w; nous pourrons appliquer à la série $\theta(x)$ les propositions démontrées pour la série $w(x)$.

Or, on a

$$\theta(x) = (w_1 - u_0 v_1)\frac{x}{1} + (w_2 - u_0 v_2)\frac{x^2}{1.2} + (w_3 - u_0 v_3)\frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\theta(x) = w'(x) - u_0 v(x).$$

Nous venons de dire que cette série $\theta(x)$ est telle que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} |\theta(x)|\, dx$$

a un sens; comme il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} |v(x)|\, dx,$$

on peut affirmer qu'il en est aussi de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} |w'(x)|\, dx.$$

On démontrerait, de la même manière, en considérant le produit des deux séries

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$$

que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} |w''(x)|\, dx$$

a un sens, et, plus généralement, qu'il en est de même de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x} |w^{(\lambda)}(x)|\, dx.$$

La série (α) *est donc absolument sommable et notre proposition est complètement démontrée.*

Nous avons ainsi reconnu la possibilité d'effectuer sur les séries absolument sommables les deux opérations simples : *addition* (qui comprend la soustraction) et *multiplication*. Il est inutile d'insister sur l'importance de ces propositions dans les applications. Il en résulte, en effet, que

Si l'on a un polynome (*à coefficients numériques*)

$$P(u, v, w)$$

et que l'on y remplace u, v, w *par des séries absolument sommables, on obtient une série absolument sommable, dont la somme est précisément égale à la valeur numérique que prendrait le polynome, si l'on y remplaçait* u, v, w *par les sommes des séries correspondantes.*

Laissant maintenant de côté les séries numériques, nous allons nous occuper des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable. Soit

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

une telle série; supposons qu'elle soit absolument sommable pour une valeur déterminée de z, $z = z_0$, réelle ou imaginaire. Nous allons montrer que *la série est absolument sommable sur le segment* OM, si l'on désigne par O le point $z = 0$ et par M le point $z = z_0$. De plus, *la somme de cette série sur* OM *est une fonction analytique, qui n'a pas de point singulier dans le cercle décrit sur* OM *comme diamètre* (mais nous ne savons pas si la série est sommable en tous les points intérieurs à ce cercle; nous verrons même, au Chapitre suivant, que, dans des cas étendus, il n'en est pas ainsi).

Pour démontrer la proposition précédente, qui peut être considérée comme la généralisation du théorème fondamental d'Abel sur les séries entières, formons la fonction entière associée à $\varphi(z)$; c'est la fonction

$$\theta(a, z) = u_0 + \frac{u_1 z a}{1} + \frac{u_2 z^2 a^2}{1.2} + \frac{u_3 z^3 a^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Cette fonction ne dépend que du produit az; nous poserons

$$\theta(a, z) = F(az).$$

Dire que la série $\varphi(z)$ est absolument sommable pour $z = z_0$, c'est dire que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a}\left|\frac{d^\lambda}{da^\lambda}\theta(a, z_0)\right| da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont toutes un sens. Or on peut remplacer ces intégrales par les suivantes

$$\int_0^\infty e^{-a}|F^{(\lambda)}(az_0)|\,da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

car l'on a

$$\frac{d^\lambda}{da^\lambda}\theta(a, z_0) = z_0^\lambda F^{(\lambda)}(az_0),$$

et la présence du facteur constant z_0^λ est sans importance.

Posons

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0};$$

les intégrales deviennent

$$\int_0^\infty e^{-a}|F^{(\lambda)}(a\rho_0 e^{i\theta_0})|\,da,$$

et, en posant

$$a\rho_0 = b,$$

l'on obtient

$$\frac{1}{\rho_0}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\rho_0}}|F^{(\lambda)}(be^{i\theta_0})|\,db;$$

le chemin d'intégration n'a pas changé puisque ρ_0 est réel et positif.

Considérons maintenant un point z situé sur le segment OM; on a

$$z = \rho e^{i\theta_0},$$

$$0 < \rho < \rho_0.$$

Pour démontrer que la série $\varphi(z)$ est sommable, il suffit de démontrer que les intégrales

$$\frac{1}{\rho}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{\rho}}|F^{(\lambda)}(be^{i\theta_0})|\,db \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont un sens; car nous pouvons faire la même transformation qu'il y a un instant.

Or ces intégrales ne diffèrent des intégrales relatives à z_0 qu'en un seul point : le facteur $e^{-\frac{b}{\rho_0}}$ est remplacé par le facteur *plus petit* $e^{-\frac{b}{\rho}}$; comme les éléments des intégrales sont positifs, les secondes intégrales ont évidemment un sens lorsque les premières en ont un.

La première partie de notre proposition est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde partie, considérons l'expression

$$\psi(z') = \frac{1}{z'}\int_0^\infty e^{-\frac{b}{z'}}\mathrm{F}(be^{i\theta_0})\,db.$$

D'après ce qui précède, cette intégrale a un sens pour z' réel et $< \rho_0$; il est évident qu'elle a aussi un sens lorsque z est imaginaire, à condition que le module du facteur $e^{-\frac{b}{z'}}$ soit inférieur au module du facteur $e^{-\frac{b}{\rho_0}}$. Il est nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait :

$$\text{partie réelle de } \frac{b}{z'} \geqq \frac{b}{\rho_0}\cdot$$

Or, on voit très aisément que, si l'on pose

$$z = z' e^{i\theta_0},$$

la condition (1) entraîne que le point représentatif de z est à l'intérieur du cercle C décrit sur OM comme diamètre. Si donc on définit la fonction $\Psi(z)$ par la relation

$$\psi(z') = \Psi(z),$$

cette fonction $\Psi(z)$ est holomorphe *à l'intérieur* du cercle C, elle coïncide d'ailleurs visiblement sur le segment OM avec la somme de la série sommable $\varphi(z)$; notre proposition est donc complètement démontrée.

Il n'est pas inutile d'observer que cette proposition ne suppose nullement l'existence d'un rayon de convergence pour la série de Taylor $\varphi(z)$, cette série peut être divergente quel que soit z. Dans ce cas, la fonction $\Psi(z)$ admet nécessairement le point $z = 0$ comme point singulier; en effet, lorsque l'on tend vers zéro sur le chemin MO, $\Psi(z)$ et ses dérivées successives tendent vers u_0, u_1, u_2, u_3, ... Si donc le point $z = 0$ n'est pas singulier pour $\Psi(z)$ la série $\varphi(z)$ a un rayon de convergence fini et représente $\Psi(z)$ dans son cercle de convergence.

La proposition que nous venons d'énoncer relativement aux dérivées peut paraître évidente; nous allons cependant la démontrer en toute rigueur, à l'occasion d'une proposition plus générale. Nous allons faire voir en effet que, *si la série* $\varphi(z)$ *est absolument sommable au point* M, *non seulement cette série, mais encore toutes ses dérivées sont absolument sommables sur* OM; mais les séries dérivées peuvent ne pas être sommables en M.

On a, en effet,

$$\varphi'(z) = u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + 4u_4 z^3 + \ldots.$$

La fonction entière associée est

$$\varpi(a, z) = u_1 + \frac{2u_2 a z}{1} + \frac{3u_3 a^2 z^2}{1.2} + \frac{4u_4 a^3 z^3}{1.2.3} + \ldots;$$

si l'on pose

$$\varpi(a, z) = G(az),$$

on a

$$G(t) = u_1 + \frac{2u_2 t}{1} + 3\frac{u_3 t^2}{1.2} + \ldots.$$

Nous avions, d'autre part,

$$F(t) = u_0 + \frac{u_1 t}{1} + \frac{u_2 t^2}{1.2} + \frac{u_3 t^3}{1.2.3} + \ldots.$$

On en conclut

$$G(t) = \frac{d}{dt}\,[t F'(t)].$$

Notre proposition revient à prouver :

1° Que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a}|G^{(\lambda)}(az)|\,da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont un sens lorsque z est sur OM, étant supposé qu'il en est de même des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a}|F^{(\lambda)}(az)|\,da;$$

2° Que, si l'on pose,

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-a} F(az)\, da,$$

on a

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty e^{-a} G(az)\, da,$$

z étant toujours situé sur OM, le point $M(z = z_0)$ exclu.

Or, on a

$$G^{(\lambda)}(t) = \frac{d^{\lambda+1}}{dt^{\lambda+1}}[tF'(t)] = tF^{(\lambda+2)}(t) + (\lambda+1)F^{(\lambda+1)}(t).$$

Il en résulte

$$\int_0^A e^{-a} |G^{(\lambda)}(az)|\, da \leq \int_0^A ae^{-a} |zF^{(\lambda+2)}(az)|\, da$$
$$+ \int_0^A (\lambda+1) e^{-a} |F^{(\lambda+1)}(az)|\, da.$$

La seconde des intégrales tend, nous le savons, vers une limite lorsque A augmente indéfiniment, lorsque z est sur OM. Quant à la première, la substitution déjà faite

$$z = \rho e^{i\theta_0}, \qquad a\rho = b$$

la transforme en

$$\frac{1}{\rho}\int_0^B be^{-\frac{b}{\rho}} |F^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})|\, db;$$

$$B = \frac{A}{\rho}.$$

Or, nous savons que l'intégrale

$$\int_0^B e^{-\frac{b}{\rho_0}} |F^{(\lambda+2)}(be^{i\theta_0})|\, db$$

tend vers une limite lorsque B croît indéfiniment. Or, ρ étant inférieur [1] à ρ_0, on a évidemment, au moins à partir d'une certaine valeur de b,

$$be^{-\frac{b}{\rho}} \leq e^{-\frac{b}{\rho_0}}.$$

L'intégrale que nous étudions tend donc aussi vers une limite

---

[1] On voit bien ici pourquoi l'on ne peut supposer $\rho = \rho_0$.

lorsque B croît indéfiniment ; on a donc

$$\int_0^A e^{-a}|G(az)|\,da < M,$$

M étant un nombre fixe, indépendant de A ; l'intégrale, dont tous les éléments sont positifs, tend donc vers une limite lorsque A croît indéfiniment, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}|G(az)|\,da$$

a un sens. La première partie de notre proposition est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde, remarquons que l'on a

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-a}F(az)\,da.$$

On en conclut

$$\varphi'(z) = \int_0^\infty ae^{-a}F'(az)\,da,$$

ce calcul étant légitime pour z compris entre o et M (M exclu), comme on peut le voir en raisonnant comme à la page précédente.

Il faut montrer que l'expression obtenue pour $\varphi'(z)$ est égale à

$$\int_0^\infty e^{-a}G(az)\,da,$$

sachant que l'on a

$$G(t) = \frac{d}{dt}[tF'(t)],$$

c'est-à-dire, en remplaçant t par az,

$$G(az) = \frac{d}{d(az)}[azF'(az)] = \frac{d}{da}[aF'(az)].$$

L'intégration par parties donne

$$\int_0^\infty e^{-a}G(az)\,da = \int_0^\infty e^{-a}\frac{d}{da}[aF'(az)]\,da$$
$$= [e^{-a}aF'(az)]_0^\infty + \int_0^\infty ae^{-a}F'(az)\,da ;$$

La partie tout intégrée étant nulle, on retrouve bien l'expression de $\varphi'(z)$ et la seconde partie de notre proposition est ainsi démontrée.

En combinant les propositions précédentes avec celles que nous avons obtenues sur les séries à termes constants, on est conduit à un théorème important, qui résume les recherches de ce paragraphe; mais quelques remarques préliminaires sont nécessaires.

Étant donnée une série $\varphi(z)$ absolument sommable sur le segment OM, il est clair que, si tous les coefficients de la série sont nuls, sa somme est nulle : elle définit une fonction analytique qui est identiquement nulle.

Réciproquement, *la fonction analytique définie par* $\varphi(z)$ *ne peut être identiquement nulle que si tous les coefficients de* $\varphi(z)$ *sont nuls.* En effet, si la fonction analytique est identiquement nulle, cette fonction et toutes ses dérivées tendent vers zéro lorsque z tend vers zéro suivant le chemin MO; or les valeurs limites de la fonction et de ses dérivées sont précisément les coefficients de $\varphi(z)$; notre remarque est donc justifiée.

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème fondamental.

Théorème. — *Soient* u, v, w, *des séries absolument sommables pour* $z = z_0$(M); *soit, d'autre part,*

$$P(u, v, w, u', v', w', \ldots, u^{(\lambda)}, v^{(\lambda)}, w^{(\lambda)}, x),$$

un polynome par rapport à u, v, w *et leurs dérivées jusqu'à l'ordre* λ, *dont les coefficients sont des séries entières en* x *ayant un rayon de convergence supérieur à* $|z_0|$.

Si dans ce polynome P, *l'on remplace* u, v, w *par les séries correspondantes et si l'on effectue les calculs comme si ces séries étaient convergentes, on obtient une série* S *qui est absolument sommable sur* OM (*le point* M *pouvant être exclu*) *et qui définit par suite une fonction analytique* F *régulière à l'intérieur du cercle décrit sur* OM *comme diamètre. Cette fonction analytique est précisément ce que devient* P *lorsqu'on y remplace* u, v, w *non plus par les séries, mais par les fonctions analytiques correspondantes.*

D'ailleurs, la fonction F *est identiquement nulle dans le* *cas et dans le cas seulement où la série S a tous ses coefficients nuls, c'est-à-dire dans le cas où les séries u, v, w vérifient formellement la relation*

$$P(u, v, w, u', \ldots, w^{(\lambda)}, x) = 0;$$

s'il en est ainsi les fonctions analytiques qui correspondent à u, v, w vérifient effectivement cette relation.

Ce théorème justifie complètement l'introduction dans les calculs des séries absolument sommables; il a été établi en supposant que les fonctions associées étaient des fonctions entières; pour son extension au cas plus général signalé p. 99, je renverrai à mon Mémoire sur les séries divergentes (*Annales de l'École Normale*, 1899, p. 91-99).

Applications aux équations différentielles.

L'énoncé qui termine le paragraphe précédent suggère naturellement l'idée d'appliquer les séries absolument sommables à l'étude des équations différentielles. Si nous considérons, en effet, pour abréger l'écriture, une équation différentielle unique, algébrique par rapport à y et ses dérivées, analytique en x,

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(\lambda)}) = 0,$$

il résulte manifestement de ce théorème que, *si une série absolument sommable y vérifie formellement l'équation différentielle, la fonction analytique définie par cette série est une intégrale de l'équation* (¹).

On sait d'ailleurs que les séries y vérifiant formellement l'équation s'obtiennent aisément par des différentiations successives; on a ainsi le moyen de déterminer, dans des cas étendus, les inté-

---

(¹) Cet énoncé suppose implicitement que f est une fonction holomorphe de x dans le voisinage de $x = 0$; cette hypothèse est nécessaire pour que le calcul formel soit possible. On pourrait étendre les considérations du texte au cas où les coefficients de y, y', ... seraient des séries en x, absolument sommables dans une même région.

grales des équations différentielles dans le voisinage des points singuliers. Nous manquons malheureusement encore de propositions précises sur les cas où l'on peut affirmer la sommabilité absolue de la série obtenue; M. Le Roy a cependant énoncé, à ce sujet, une proposition très intéressante; mais le Mémoire qu'il doit y consacrer n'a pas encore paru [1].

Donnons cependant au moins un exemple; soit l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - y;$$

cherchons à déterminer l'intégrale y qui pour $x = 0$ se réduit aussi à zéro.

En différentiant l'équation proposée, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
&x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 2x,\\
&x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + 4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 2,\\
&x^2 \frac{d^4 y}{dx^4} + 6x \frac{d^3 y}{dx^3} + 2.3 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^3 y}{dx^3} = 0,\\
&x^2 \frac{d^5 y}{dx^4} + 8x \frac{d^4 y}{dx^4} + 3.4 \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On aperçoit aisément la loi des termes successifs; si l'on fait

$$x = 0, \qquad y_0 = 0,$$

on obtient successivement

$$\begin{aligned}
y'_0 &= 0,\\
y''_0 &= 2,\\
y'''_0 &= -2.3 y''_0 = -2^2\,3,\\
y_0^{(\text{IV})} &= -3.4 y'''_0 = 2^2.3^2.4,\\
y_0^{(\text{V})} &= -4.5 y_0^{(\text{IV})} = -2^2.3^2.4^2.5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Le développement formel de y doit s'écrire

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1} x + \frac{y''_0}{1.2} x^2 + \frac{y'''_0}{1.2.3} x^3 + \ldots;$$

---

[1] *Comptes rendus*, t. CXXVIII, p. 495.

on obtient donc

$$y = x^2 - 2x^3 + 2.3x^4 - 2.3.4x^5 + 2.3.4.5x^6 - \ldots,$$

cette série est divergente quel que soit x.

La fonction associée est

$$F(ax) = \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{2a^3x^3}{3!} + \frac{2.3a^4x^4}{4!} - \ldots;$$

on a donc

$$F(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$F(t) = t - \log(1 + t).$$

Nous nous trouvons dans le cas où la fonction associée n'est pas une fonction entière; nous utiliserons donc la généralisation du théorème fondamental indiquée dans les dernières lignes du paragraphe précédent et nous obtiendrons

$$y = \int_0^{\infty} e^{-a}[ax - \log(1 + ax)]\,da.$$

On simplifierait cette expression en intégrant par parties et l'on vérifierait aisément que l'on a bien une intégrale de l'équation proposée, mais nous n'entrerons pas dans le détail de ces calculs.

Nous nous contenterons aussi de signaler sans démonstration la proposition suivante (*Mémoires sur les séries divergentes*, p. 100 et suiv.) :

Soit

$$x^2\frac{dy}{dx} = \varpi(x, y)$$

une équation différentielle dans laquelle $\varpi(x, y)$ désigne un polynome ne renfermant pas de terme de degré 0 ou 1. Si l'on forme le développement formel de l'intégrale qui correspond aux conditions initiales

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad y'_0 = 0,$$

on obtient une série généralement divergente

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots.$$

La série associée

$$\frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \ldots$$

a certainement un rayon de convergence différent de zéro.

Il résulte de la proposition précédente que, pour l'équation différentielle étudiée, la méthode des séries sommables remplace l'étude d'un développement divergent par l'étude dans le plan d'une série de Taylor dont le rayon de convergence, différent de zéro, sera généralement fini. Les propriétés de l'intégrale répondant aux conditions initiales données, dans le cas où cette intégrale existe, se trouvent ainsi ramenées à l'étude des singularités, dans le plan, de la fonction analytique définie par la série de Taylor. La singularité qui existe au point $x = 0$ se trouve ainsi, en quelque sorte, *dispersée* dans tout le plan; nous verrons au Chapitre suivant que la méthode des séries sommables permet aussi de réaliser un phénomène inverse : de *concentrer* en un point unique (à l'infini, par exemple) toutes les singularités que présente une fonction analytique dans le plan.

Les résultats que nous venons d'établir au sujet de l'application des séries absolument sommables à l'intégration des équations différentielles sont tout à fait analogues à ceux que nous avions établis, dans le Chapitre précédent, relativement à l'application, au même but, des séries de Stieltjes.

On peut, à ce sujet, se poser plusieurs questions, dont la plus importante paraît être la suivante, qui n'a jusqu'ici fait l'objet d'aucune recherche [1] :

Dans le cas où une série est à la fois *absolument sommable* et de *Stieltjes,* les deux méthodes fournissent-elles le même résultat?

Cette question doit probablement être résolue par l'affirmative; dans le cas contraire une seule série pourrait, dans certains cas, faire connaître deux intégrales d'une équation différentielle satisfaisant, *en un point singulier,* aux mêmes conditions initiales; nous laisserons aussi de côté le problème de l'extension des résultats précédents aux séries doubles et multiples, aux séries ordonnées suivant les puissances de plusieurs variables et, par

---

[1] *Voir* la Note de la p. 154 et le Mémoire qui y est cité (p. 428).

suite, aux équations aux dérivées partielles. Il nous parait qu'il faut d'abord s'attacher à approfondir le cas le plus simple d'une variable, avant de s'attaquer au cas général.

En terminant ce Chapitre, observons que nous n'y avons pas fait usage de la théorie du prolongement analytique; nous avons tenu à montrer que la théorie des séries sommables est indépendante. Il y a cependant entre les deux théories des relations intéressantes, dont l'étude fera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

LES SÉRIES SOMMABLES ET LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

Le polygone de sommabilité.

Considérons une série de Taylor

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u^3 z^3 + \dots$$

dont nous supposerons essentiellement le rayon de convergence *différent de zéro*. Nous supposerons aussi que ce rayon n'est pas infini, le cas où la série ne divergerait pour aucune valeur de z ne pouvant avoir d'intérêt ici.

Soit z_0 une valeur de z pour laquelle la série est divergente; il est naturel de convenir que la somme de la série

$$u_0 + u_1 z_0 + u_2 z_0^2 + \dots$$

est égale à $\varphi(z_0)$, en désignant par $\varphi(z_0)$ la valeur au point $z = z_0$ de la fonction analytique définie par la série proposée.

On est ainsi conduit naturellement, par la théorie du prolongement analytique, à une méthode de sommation des séries divergentes; il est clair, en effet, que si l'on a une série numérique divergente

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots,$$

on pourra, en désignant par z_0 une constante quelconque, poser

$$v_n = u_n z_0^n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et il viendra

$$v = u_0 + u_1 z_0 + u_2 z_0^2 + \dots = \varphi(z_0).$$

Il est manifeste, d'ailleurs, que le résultat obtenu ne dépend pas de la valeur choisie pour z_0; on peut supposer, par exemple,

$$z_0 = 1.$$

Mais il est clair que la méthode précédente ne peut s'appliquer que si la série $\varphi(z)$ a un rayon de convergence différent de zéro, ce qui revient à dire qu'il existe un nombre M tel que l'on ait, quel que soit n,

$$|c_n| < M ;$$

il existe donc des séries *absolument sommables* auxquelles ne s'applique pas la méthode du prolongement analytique; parmi ces séries se trouvent, en particulier, les séries divergentes qui vérifient les équations différentielles au voisinage de certains points singuliers. Par contre, il existe, comme nous le verrons, des séries auxquelles s'applique la méthode de prolongement analytique et qui ne sont pas absolument sommables; nous verrons cependant que le remplacement de la fonction sommatrice e^a par e^{a^k}, k étant un entier convenablement choisi, permet de les sommer, dans des cas très étendus.

Il importe ici de faire une remarque essentielle; dans le cas où la fonction analytique $\varphi(z)$ n'est pas uniforme, la théorie précédente conduit à attribuer à la série divergente $\varphi(z_0)$ plusieurs valeurs différentes, ou même une infinité. Il en est de même, d'ailleurs, pour les séries convergentes.

Soit, par exemple,

$$\varphi(z) = \log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots.$$

Pour $z = 1$, il vient

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

D'après la théorie du prolongement analytique, on doit admettre que cette série convergente a pour somme, non seulement la valeur arithmétique de $\log 2$, qui est sa somme arithmétique, mais toutes les valeurs de $\log(1+z)$, pour $z = 1$, c'est-à-dire

$$\log 2 + 2ki\pi,$$

où k est un nombre entier quelconque. Cette convention n'est d'ailleurs pas plus étrange que la théorie de Cauchy, qui attribue ces mêmes valeurs à l'intégrale définie

$$\int_1^2 \frac{dz}{z}.$$

à condition que le chemin d'intégration puisse être convenablement choisi [1].

Pour plus de netteté, nous éviterons d'attribuer à une série des valeurs multiples; dans ce but nous conviendrons d'entendre par $\varphi(z_0)$ la valeur que l'on obtient lorsque l'on va de z en z_0 en suivant un chemin rectiligne; la série est ainsi définie dans tout le plan, sauf sur le prolongement des droites qui joignent l'origine aux points singuliers [2].

La manière dont se pose le problème des séries divergentes est alors la suivante : *Déterminer la valeur numérique de $\varphi(z_0)$ en fonction des valeurs numériques de ses termes.* La théorie du prolongement analytique fournit d'ailleurs *théoriquement* une méthode pour résoudre cette question; mais cette méthode n'est guère pratiquement applicable. Nous verrons au Chapitre suivant comment M. Mittag-Leffler en a donné une solution complète des plus élégantes; nous allons étudier ici la solution qui en est fournie par la théorie des séries sommables, solution qui est moins étendue que celle de M. Mittag-Leffler, mais qui paraît être, en général, plus simple dans les cas où elle est applicable.

Dans ce but, nous allons démontrer le théorème suivant : *Si la fonction analytique $\varphi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle C passant par l'origine, et sur ce cercle, la série $\varphi(z)$ est absolument sommable sur le diamètre du cercle qui passe à l'origine, y compris son extrémité.*

Nous désignerons par OM le diamètre du cercle C qui passe à l'origine; M est son extrémité; d'autre part, nous remarquerons que, la fonction $f(z)$ n'ayant aucun point singulier sur C, on peut tracer un cercle C' concentrique à C et de rayon plus grand, tel que la fonction n'ait aucun point singulier sur C' ni à son inté-

---

(1) Il est d'ailleurs aisé de transformer l'intégrale en la série. On a

$$\int_1^2 \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{dz}{1+z} = \int_0^1 (1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots)\,dz$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots.$$

(2) La région dans laquelle $\varphi(z)$ est ainsi définie coïncide avec l'*étoile* de M. Mittag-Leffler, dont il sera question au Chapitre suivant

rieur [1]; nous désignerons par O'M' le diamètre de C' qui coïncide avec OM; O' est voisin de O et M' voisin de M.

La fonction $\varphi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur de C' et sur C', les coefficients u_n de son développement en série sont donnés par la formule

$$u_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous allons, à l'aide de ces valeurs de u_n, former la fonction entière associée à $\varphi(z)$; cette fonction $\theta(a)$ est définie par la formule

$$\theta(a) = u_0 + \frac{u_1 a z}{1} + \frac{u_2 a^2 z^2}{1.2} + \frac{u_3 a^3 z^3}{1.2.3} + \ldots.$$

On a donc, en remplaçant les u_n par leurs valeurs,

$$\theta(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \varphi(x)\left[\frac{1}{x} + \frac{az}{x^2} + \frac{a^2 z^2}{1.2\,x^2} + \frac{a^3 z^3}{1.2.3\,x^3} + \ldots\right]dx,$$

c'est-à-dire

$$\theta(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\varphi(x)}{x}\, e^{\frac{az}{x}}\, dx.$$

On obtient ainsi

$$e^{-a}\theta(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\varphi(x)}{x}\, e^{a\left(\frac{z}{x}-1\right)}\, dx.$$

Supposons z choisi de telle manière que l'on ait, quel que soit x sur C',

$$\text{partie réelle de } \frac{z}{x} < 1 - \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif; désignons d'ailleurs par M le maximum de $\left|\frac{\varphi(x)}{x}\right|$ sur C', et par R' le rayon de ce cercle; on aura

$$|e^{-a}\theta(a)| < \frac{1}{2\pi}\int_{C'} \mathrm{M}e^{-\varepsilon a}|dx| = \mathrm{MR}'e^{-\varepsilon a}.$$

Donc l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}|\theta(a)|\,da$$

---

[1] C'est une conséquence du fait que tout point limite de points singuliers est singulier, c'est-à-dire que l'ensemble des points singuliers est parfait.

a certainement un sens. On ferait aisément une démonstration analogue pour les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a} |\theta^{(\lambda)}(a)| \, da \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

La série $\varphi(z)$ est donc absolument sommable pour toutes les valeurs de z qui satisfont à la condition

$$(1) \qquad \text{partie réelle de } \frac{z}{x} < 1 - \varepsilon,$$

quel que soit x sur C', ε étant positif.

Il est clair que si, x étant donné, l'on détermine la droite lieu des points tels que l'on ait

$$(2) \qquad \text{partie réelle de } \frac{z}{x} = 1,$$

la condition (1) dans laquelle x a une valeur déterminée, est vérifiée pour tous les points situés d'un certain côté de cette droite et pour ces points seulement.

Il en résulte que, étant donné un point x, le lieu des points z qui satisfont à la condition (1) est formé de la portion du plan située du même côté que l'origine par rapport à la perpendiculaire élevée au point x à la droite qui joint ce point à l'origine. Si l'on effectue cette construction pour tous les points de C', on sait que, le point O étant intérieur à C', l'enveloppe des perpendiculaires qui viennent d'être définies est une ellipse ayant pour grand axe $O'M'$ et pour foyer le point O; cette ellipse est donc d'autant plus aplatie que le cercle C' est plus voisin de C; mais, dans tous les cas, elle renferme à son intérieur le segment OM qui joint ses deux foyers.

Notre proposition est donc démontrée, car il résulte de ce qui précède que la série $\varphi(z)$ est absolument sommable pour tous les points intérieurs à l'ellipse [1].

Il est d'ailleurs clair que la série $\varphi(z)$ étant absolument sommable à l'intérieur de l'ellipse, sa somme est une fonction ana-

---

[1] Elle est même absolument sommable pour les points de l'ellipse, car $\varphi(z)$ n'ayant pas de points singuliers sur C', on pourrait remplacer C' par un cercle plus grand C''; l'ellipse est ainsi remplacée par une ellipse homofocale plus grande.

lytique régulière dans cette aire ([1]); et, comme cette fonction analytique coïncide évidemment avec $\varphi(z)$ dans la partie commune à l'ellipse et au cercle de convergence de $\varphi(z)$, elle est égale à $\varphi(z)$ dans toute l'aire considérée, et en particulier sur le segment OM.

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour définir exactement le domaine dans lequel la série $\varphi(z)$ est *absolument sommable*. Nous venons de voir en effet que cette série est absolument sommable en un point M, si la fonction analytique $\varphi(z)$ n'admet aucun point singulier à l'intérieur du cercle C décrit sur OM comme diamètre, ni sur ce cercle.

D'autre part, il résulte d'une proposition démontrée au Chapitre précédent (p. 108) que, si la série $\varphi(z)$ est absolument sommable en M, elle est absolument sommable sur OM, et que sa somme définit une fonction analytique n'admettant aucun point singulier à l'intérieur du cercle C, mais pouvant en admettre sur ce cercle ([2]).

On peut réunir les deux propositions précédentes en un seul énoncé en disant que, *pour que la série $\varphi(z)$ soit sommable en M, il est nécessaire que la fonction analytique $\varphi(z)$ n'admette aucun point singulier à l'intérieur de C, et suffisant que cette fonction n'admette aucun point singulier, soit à l'intérieur de C, soit sur C.*

Ceci posé, désignons par A un point singulier de $\varphi(z)$ et par Δ la perpendiculaire élevée en A à la droite OA; si le point A est sur C la droite Δ passe en M; si le point A est intérieur à C la droite Δ rencontre le segment OM, c'est-à-dire coupe la droite OM entre O et M; si le point A est extérieur à C, la droite Δ ne ren-

---

([1]) Il pourrait y avoir une difficulté, l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}\theta(a)\,da$$

qui définit la somme, ayant sa limite supérieure infinie. Il suffit d'observer qu'il existe un nombre ε tel que l'on ait, à partir d'une valeur *fixe* de a, quel que soit z intérieur à l'ellipse $e^{-a}|\theta(a)| < e^{-\varepsilon a}$. L'existence de ce nombre ε se démontre aisément en considérant une ellipse homofocale plus grande, comme il est expliqué dans la note précédente. On peut exprimer ce fait en disant que la série est uniformément sommable à l'intérieur de l'ellipse.

([2]) D'ailleurs cette fonction analytique, coïncidant avec $\varphi(z)$ sur la portion de OM intérieure au cercle de convergence de la série $\varphi(z)$, est identique à la fonction $\varphi(z)$.

contre pas le segment OM. On peut aussi distinguer ces deux derniers cas en disant que, suivant que A est extérieur ou intérieur à C, les points O et M sont ou ne sont pas du même côté de Δ.

Donc, si A était le seul point singulier de $\varphi(z)$, pour que la série fût absolument sommable en M, *il serait nécessaire que* M *ne soit pas au delà de* Δ *par rapport à* O (M *pouvant être sur* Δ), *et suffisant que* M *soit en deçà de* Δ *par rapport à* O (*le cas de* M *sur* Δ *étant douteux*).

Dans le cas où il y a un nombre limité de points singuliers, traçons les droites Δ', Δ'', ..., $\Delta^{(k)}$ qui correspondent à chacun d'eux de la même manière que Δ correspond à A. La portion du

Fig. 12.

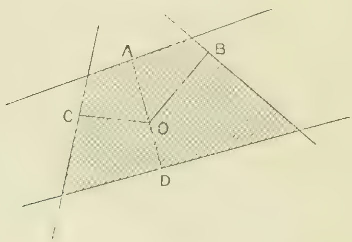
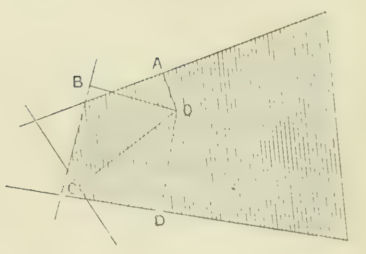


Fig. 13.



plan située du même côté que O par rapport à chacune de ces droites constitue ce que nous appellerons le *polygone de sommabilité*.

Dans certains cas, ce polygone peut ne pas être fermé, c'est-à-dire s'étendre jusqu'à l'infini. Nous avons indiqué dans les *fig.* 12, 13, 14, 15, quelques-uns des cas qui peuvent se présenter, en supposant qu'il y ait quatre points singuliers A, B, C, D. Le polygone de sommabilité est couvert de hachures.

Dans le cas où il y a une infinité de points singuliers, il peut fort bien arriver qu'il existe un polygone de sommabilité d'un nombre limité de côtés [1], formé par les droites qui correspondent à un nombre limité de points singuliers, les droites correspondant aux autres points singuliers ne rencontrant pas le contour de ce polygone et ne jouant par suite aucun rôle : il en est ainsi, dans la *fig.* 14, de la droite qui correspond au point D.

Fig. 14.

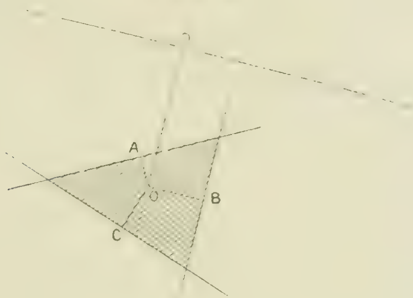
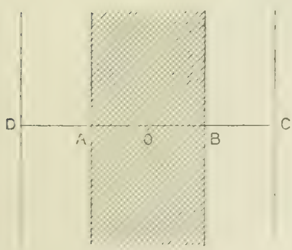


Fig. 15.



Enfin, il peut arriver que les points singuliers n'étant pas en nombre fini, l'ensemble des droites Δ forme un polygone d'une infinité de côtés, ou bien qu'une infinité d'entre elles enveloppent une courbe : ce dernier cas se présentera lorsque la fonction

(1) Il en sera même toujours ainsi dans le cas où, le polygone de sommabilité ne s'étendant pas à l'infini, les points singuliers n'ont aucun point limite à distance finie (c'est-à-dire sont en nombre limité dans toute région finie du plan).

admet une ligne singulière essentielle; seulement, il pourra arriver que la courbe soit en dehors du polygone de sommabilité comme, dans la *fig.* 14, la droite qui correspond à D.

Quoi qu'il en soit, *nous conserverons toujours le nom de* polygone de sommabilité *à l'ensemble des points du plan qui sont, par rapport à toutes les droites* Δ *correspondant aux divers points singuliers, du même côté que le point* O. Ces points A sont dits *intérieurs* au polygone; leurs points limites [1] constituent le *contour* de ce polygone : chacun de ces points limites se trouve sur au moins une droite Δ.

Ces définitions posées on a la proposition suivante :

La série $\varphi(z)$ *est absolument sommable pour les points intérieurs au polygone de sommabilité; elle peut l'être ou non pour les points du contour, elle ne l'est pas pour les autres points du plan, c'est-à-dire pour les points extérieurs au polygone.*

On voit que cette proposition définit d'une manière précise le domaine dans lequel la méthode des séries absolument sommables permet de réaliser le prolongement analytique de $\varphi(z)$; ce domaine peut être plus ou moins étendu, suivant la distribution dans le plan des points singuliers, mais un fait est essentiel dans les applications, comme nous le verrons à la fin de ce Chapitre : *ce domaine dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier.* En d'autres termes, soit A un point du cercle de convergence, non singulier pour $\varphi(z)$: *il existe un cercle de centre* A *et tout entier intérieur au polygone de sommabilité.*

Observons, en terminant ce paragraphe, que, si l'on se place au point de vue du prolongement analytique les diverses propositions sur la possibilité d'additionner, de multiplier, de différentier les séries divergentes; de les modifier en ajoutant entre eux, permutant, ou supprimant un nombre limité de termes, toutes ces propositions dont la démonstration a occupé une grande partie du Chapitre précédent *deviennent évidentes*. Seulement

---

[1] Un point limite est un point dans le voisinage duquel se trouve une infinité de points A, c'est-à-dire tel qu'il y ait des points A dans tout cercle de rayon si petit qu'il soit, ayant ce point pour centre. Nous ne comptons pas ici les points A parmi les points limites.

elles ne s'appliquent qu'aux séries auxquelles correspondent des séries de Taylor $\varphi(z)$ à rayon de convergence différent de zéro; c'est pourquoi nos démonstrations n'étaient pas inutiles.

Les généralisations simples de la méthode exponentielle.

Il résulte de ce qui précède que le polygone de sommabilité relatif à une fonction $\varphi(z)$ est parfois à peine plus étendu que le cercle de convergence. Nous allons montrer comment, en modifiant légèrement la méthode de sommation exponentielle, on peut arriver à sommer une série de Taylor dans une région bien plus étendue.

La modification dont nous voulons parler consiste à employer, comme fonction sommatrice, la fonction e^{a^k}, k étant un entier positif, au lieu de e^a [1].

On a

$$e^{a^k} = 1 + \frac{a^k}{1} + \frac{a^{2k}}{2!} + \ldots + \frac{a^{nk}}{n!} + \ldots.$$

Si l'on considère la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z_2 + \ldots + u_k z^k + \ldots$$

et si l'on désigne par s_n la somme de ses n premiers termes, on se trouve conduit à chercher la limite vers laquelle tend l'expression

$$\sigma(a) = \frac{s_0 + \frac{s_k a^k}{1} + \frac{s_{2k} a^{2k}}{2!} + \ldots}{e^{a^k}},$$

lorsque a augmente indéfiniment par valeurs positives.

Nous poserons $a^k = b$, $\sigma(a) = s(b)$ et il viendra

$$s(b) = e^{-b}\left(s_0 + \frac{s_k b}{1} + \frac{s_{2k} b^2}{2!} + \ldots\right);$$

---

[1] J'ai signalé l'intérêt qui s'attache à la considération des fonctions sommatrices e^{a^k} dans mon Mémoire *Fondements de la théorie des séries divergentes sommables* (*Journal de M. Jordan*, 1896, p. 121); voir aussi *Comptes rendus*, 7 avril 1896. Ces indications ont été développées simultanément dans le Mémoire de M. Servant, cité p. 94, et dans mon *Mémoire sur les séries divergentes*. Nous employons ici une méthode nouvelle permettant de démontrer la sommabilité *absolue*.

or on a

$$\lim_{b=\infty} s(b) = s_0 + \int_0^\infty s'(b)\,db = \int_0^\infty e^{-b} u(b, z)\,db,$$

en posant

$$u(b, z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{k-1} z^{k-1} + \frac{b}{1}(u_k z^k + \ldots + u_{2k-1} z^{2k-1})$$
$$+ \frac{b^2}{2!}(u_{2k} z^k + \ldots + u_{3k-1} z^{3k+1}) + \ldots.$$

Il s'agit de déterminer dans quelles régions du plan les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b} \left| \frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda} u(b, z) \right| db \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ont un sens; la série $\varphi(z)$ sera dite *absolument sommable* dans ces régions.

Or, on peut écrire

$$u(b, z) = \varphi_0(b, z) + z\varphi_1(b, z) + z^2\varphi_2(b, z) + \ldots + z^{k-1}\varphi_{k-1}(b, z),$$

en posant

$$\begin{aligned}
\varphi_0(b, z) &= u_0 + \frac{b}{1} u_k z^k + \frac{b^2}{2!} u_{2k} z^{2k} + \ldots,\\
\varphi_1(b, z) &= u_1 + \frac{b}{1} u_{k+1} z^k + \frac{b^2}{2!} u_{2k+1} z^{2k} + \ldots,\\
\varphi_2(b, z) &= u_2 + \frac{b}{1} u_{k+2} z^k + \frac{b^2}{2!} u_{2k+2} z^{2k} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{k-1}(b, z) &= u_{k-1} + \frac{b}{1} u_{2k-1} z^k + \frac{b^2}{2!} u_{3k-1} z^{2k} + \ldots.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$z^k = y,$$

on remarquera que les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ ne dépendent que de y; on a, par exemple,

$$\varphi_0(b, z) = \psi_0(b, y) = u_0 + \frac{b}{1} u_k y + \frac{b^2}{1.2} u_{2k} y^2 + \ldots.$$

On a, d'autre part,

$$\varphi(z) = \theta_0(y) + z\theta_1(y) + \ldots + z^{k-1}\theta_{k-1}(y),$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\theta_0(y) &= u_0 + u_k y + u_{2k} y^2 + \ldots, \\
\theta_1(y) &= u_1 + u_{k+1} y + u_{2k+1} y^2 + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta_{k-1}(y) &= u_{k-1} + u_{2k-1} y + u_{3k-1} y^2 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Si l'on applique à la série $\theta_0(y)$ la méthode de sommation exponentielle, on obtient

$$\theta_0(y) = \int_0^\infty e^{-b} \psi_0(b, y)\, db$$

et l'on sait que les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b} \left| \frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda} \psi_0(b, y) \right| db$$

ont un sens à l'intérieur du polygone de sommabilité relatif à $\theta_0(y)$ et n'en ont pas à l'extérieur.

Or, si l'on désigne par ω une racine primitive de l'équation

$$\omega^k = 1,$$

on a visiblement

$$\theta_0(y) = \varphi(z) + \varphi(\omega z) + \varphi(\omega^2 z) + \ldots + \varphi(\omega^{k-1} z).$$

Les points singuliers de la fonction $\theta_0(y)$ se déterminent donc aisément si l'on connaît les points singuliers de $\varphi(z)$; en désignant par α un point singulier de $\varphi(z)$, la fonction $\theta_0(y)$ admet le point singulier

$$\beta = \alpha^k$$

et l'on obtient ainsi *tous* les points singuliers de $\theta_0(y)$: il en est d'ailleurs de même pour les autres fonctions θ_i; on a, par exemple,

$$\theta_1(y) = \frac{\varphi(z)}{z} + \frac{\varphi(\omega z)}{\omega z} + \ldots + \frac{\varphi(\omega^{k-1} z)}{\omega^{k-1} z}$$

et l'on voit immédiatement que le point singulier $z = 0$, dont on aurait pu craindre l'introduction, est seulement apparent.

Le polygone de sommabilité est donc le même pour toutes les fonctions $\theta_i(y)$; lorsque y est intérieur à ce polygone, toutes les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b} \left| \frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda} \psi_i(b, y) \right| db \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \ldots, \\ i = 0, 1, \ldots, k-1 \end{pmatrix}$$

ont un sens. Or on a

$$\varphi(b, z) = \theta_0(b, y) + \ldots + z^{k-1}\theta_{k-1}(b, y).$$

On en conclut que, si y est intérieur au polygone de sommabilité, les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-b}\left|\frac{\partial^\lambda}{\partial b^\lambda}\varphi(b, z)\right| db$$

ont toutes un sens, ce que nous exprimerons en disant que la fonction $\varphi(z)$ est absolument sommable par l'emploi de e^{a^k}.

Il reste à déterminer dans quelle région de son plan se trouve z lorsque y est à l'intérieur du polygone de sommabilité que nous avons défini; il suffit évidemment pour cela de savoir quelle courbe correspond, dans le plan de la variable z, à un côté déterminé de ce polygone.

Nous avons vu que, en désignant par α_1 un point singulier de $\varphi(z)$, le point singulier correspondant des fonctions $\theta_i(y)$ est α_1^k. Si nous posons

$$\alpha_1 = r_1 e^{ia_1},$$

la perpendiculaire élevée au point α^k à la droite qui joint l'origine à ce point, perpendiculaire qui est un des côtés du polygone de sommabilité, aura pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho_1 \cos(\theta_1 - ka_1) = r_1^k, \tag{1}$$

en désignant par ρ_1 et θ_1 les coordonnées courantes, ce qui revient à poser

$$y = \rho_1 e^{i\theta_1}.$$

Si nous posons, d'autre part,

$$z = \rho e^{i\theta},$$

on a visiblement

$$\rho_1 = \rho^k, \qquad \theta_1 = k\theta,$$

et la courbe qui, dans le plan de la variable z, correspond à la droite (1), située dans le plan de la variable y, a pour équation

$$\rho^k \cos k(\theta - a_1) = r_1^k. \tag{2}$$

Telle est la courbe qui limite la région de sommabilité absolue, lorsqu'on emploie la fonction sommatrice e^{a^k}; on doit y joindre naturellement les courbes analogues, correspondant aux divers points singuliers α_2, a_3, ..., pour obtenir le polygone de sommabilité, ici curviligne ([1]).

La courbe (2) est aisée à construire; elle est formée de k branches hyperboliques égales entre elles, tangentes au cercle

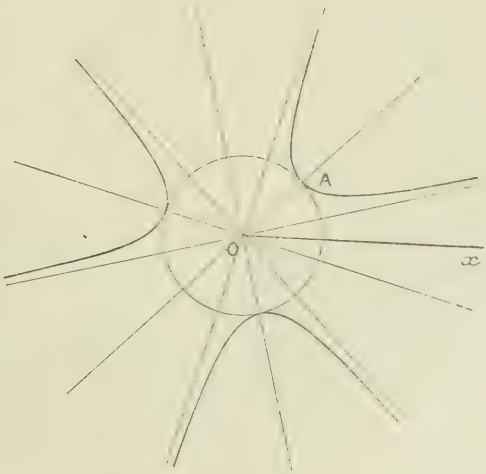
$$\rho = r_1$$

et asymptotes aux droites

$$a_1 + (2m+1)\frac{\pi}{2k} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, 2k-1).$$

Figurons-la, en supposant, pour fixer les idées, $k = 3$; le point α est en A.

Fig. 16.



Mais le point essentiel pour nous est le suivant; il résulte de l'équation (2) que l'on a

$$\cos k(\theta - a_1) > 0,$$

c'est-à-dire que, m étant un entier convenablement choisi, on

([1]) Il résulte simplement de notre démonstration que la série est absolument sommable dans la région du plan située, par rapport à ces diverses courbes, du même côté que l'origine, mais non pas qu'elle *n'est pas* absolument sommable dans l'autre région; mais nous n'aurons pas besoin de ce dernier résultat.

doit avoir

$$2m\pi - \frac{\pi}{2} < k(\theta - a_1) < 2m\pi + \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire

$$a_1 + \frac{(4m+1)\pi}{2k} < \theta < a_1 + \frac{(4m+1)\pi}{2k}.$$

Il ne saurait donc y avoir de points de la courbe dans les angles définis par les relations

$$a_1 + \frac{(4m+1)\pi}{2k} \leq \theta \leq a_1 + \frac{(4m+3)\pi}{2k}.$$

Si l'on pose

$$a_1 + \frac{\pi}{2k} = b_1,$$

ces relations deviennent

$$b_1 + \frac{2m}{k}\pi \leq \theta \leq b_1 + \frac{2m+1}{k}\pi,$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{2m}{k} \leq \frac{\theta - b_1}{\pi} \leq \frac{2m+1}{k}.$$

Cela posé, considérons une fonction $\varphi(z)$ n'admettant pas une infinité de points singuliers à distance finie, c'est-à-dire telle que, dans un cercle de centre O et de rayon fini, il y ait un nombre limité de points singuliers. Soit, de plus, M un point du plan, *tel que le segment* OM *ne contienne aucun point singulier de* $\varphi(z)$ *et ne fasse, avec aucune des droites qui joignent* O *à ces points singuliers, un angle commensurable avec* π.

Nous allons démontrer que l'on peut choisir le nombre k *de telle manière que* $\varphi(z)$ *soit absolument sommable en* M.

Dans ce but, désignons par ρ et θ les coordonnées polaires de M; par hypothèse, $\varphi(z)$ admet à l'intérieur du cercle de rayon ρ un nombre limité de points singuliers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Il est d'ailleurs clair que, pour étudier la sommabilité de la série en M, il n'y a pas lieu de se préoccuper des points singuliers extérieurs au cercle de rayon ρ, puisque les courbes correspondantes sont entièrement extérieures à ce cercle. Nous venons de voir que, pour que le point M se trouve dans la région de sommabilité par rapport à la courbe relative au point singulier α_1, il *suffit* que l'on ait la relation (3) que nous écrirons

$$\frac{2m}{k} \leq c_1 \leq \frac{2m+1}{k}, \qquad m \text{ entier},$$

en posant

$$c_1 = \frac{\theta - b}{\pi}.$$

On obtiendrait de même des inégalités analogues relatives aux autres points singuliers $\alpha_2, \ldots, \alpha_q$. En posant

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\lambda &= r_\lambda e^{ia_\lambda} \\ a_\lambda + \frac{\pi}{2k} &= b_\lambda \\ c_\lambda &= \frac{\theta - b_\lambda}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots q),$$

ces inégalités s'écriront

$$(4) \qquad \frac{2m_\lambda}{k} \leq c_\lambda \leq \frac{2m_\lambda + 1}{k} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, q),$$

les m_λ étant des nombres entiers.

Il faut montrer qu'il est possible de choisir les nombres k, m_1, $m_2, \ldots m_\lambda$ de manière que ces inégalités soient vérifiées. Or, cette proposition est une conséquence immédiate du théorème suivant, que Kronecker a obtenu en généralisant un théorème de M. Hermite [1] : *Étant donnés des nombres incommensurables* $x_1, x_2, \ldots x_q$ *et des nombres quelconques* $y_1, y_2, \ldots y_q$, *il est possible de trouver des entiers* $m_1, m_2, \ldots m_q$ *tels*

---

[1] Me trouvant à la campagne, avec peu de livres, au moment où j'ai eu besoin de ce résultat, je fus amené à en chercher une démonstration; à mon retour à Paris, je communiquai à M. Hermite le théorème et la démonstration, à laquelle il voulut bien s'intéresser; mais il m'apprit qu'un théorème analogue avait été donné par Kronecker, me conseillant de m'adresser à M. Minkowski pour avoir l'indication bibliographique exacte, qu'il n'avait plus présente à la mémoire. M. Minkowski me la fournit avec la plus grande obligeance et voulut bien m'apprendre aussi qu'il possédait, depuis plusieurs années, une démonstration basée sur le même principe que la mienne; grâce à ces renseignements, dont je tiens à le remercier, je puis me contenter de renvoyer le lecteur au théorème de Kronecker, qui a paru dans les *Sitzungsberichte* de Berlin (1884, p. 1179-1193 et 1271-1299) et à la démonstration de M. Minkowski, qui paraîtra incessamment dans le second fascicule de sa *Geometrie der Zahlen*.

que l'on ait

$$|mx_i - m_i - y_i| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

quel que soit le nombre positif ε *donné d'avance.*

Ainsi, étant donnée une série de Taylor $\varphi(z)$ à rayon de convergence non nul, *la méthode exponentielle généralisée permet de la sommer en tout point* M *satisfaisant à la condition déjà indiquée, c'est-à-dire en un point aussi voisin que l'on veut d'un point quelconque du plan,* si toutefois on suppose que $\varphi(z)$ n'a qu'un nombre limité de points singuliers dans toute aire finie. Le théorème précédent a quelque analogie avec celui de M. Mittag-Leffler, dont nous parlerons au prochain Chapitre, mais il est moins parfait en deux points :

1° La valeur du nombre k dépend de la position de M ;

2° Cette valeur est difficile à déterminer lorsqu'on connaît seulement la série $\varphi(z)$, bien qu'il soit possible de donner des procédés théoriques pour effectuer cette détermination.

Nous bornerons là notre étude de la méthode exponentielle généralisée, laissant de côté son application à l'étude des fonctions non uniformes autour d'un point singulier, supposé unique sur le cercle de convergence ([1]).

La recherche des points singuliers.

Les méthodes précédemment exposées fournissent un moyen, au moins théorique, d'étudier un développement de Taylor $\varphi(z)$ en dehors de son cercle de convergence, il est donc naturel de chercher à les appliquer à la recherche des points singuliers de $\varphi(z)$: c'est, en effet, la question généralement la plus importante dans l'étude de cette fonction.

Les relations entre les points singuliers d'une fonction et son développement de Taylor ont été étudiées pour la première fois, d'une manière détaillée, dans le Mémoire de M. Darboux, *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* ([2]), Mémoire qui est encore aujourd'hui fondamental dans la question. Dans ce Mémoire, M. Darboux se proposait essentiellement, connaissant

([1]) Voir *Mémoire sur les séries divergentes,* p. 77-78.

([2]) *Journal de Liouville,* 1878.

les points singuliers, de déterminer la valeur principale des coefficients de la série. C'est ce problème inverse qui nous occupe ici; mais on conçoit bien que ces deux problèmes aient entre eux d'étroites relations.

Le problème de la détermination des points singuliers, au moyen des coefficients, a été abordé pour la première fois, dans toute sa généralité, par M. Hadamard, dans sa Thèse bien connue (1).

Ce problème est très ardu, aussi n'est-il pas étonnant que, dans ce premier travail, il soit loin d'être résolu complètement. M. Hadamard montra d'ailleurs bientôt l'importance de l'étude qu'il avait abordée en faisant voir que les résultats obtenus par lui, quoique, en apparence, très particuliers et de forme compliquée, pouvaient avoir des applications du plus grand intérêt. Je fais allusion ici au célèbre Mémoire dans lequel M. Hadamard détermine le genre de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et fait faire des progrès essentiels à la théorie des fonctions entières (2).

Malheureusement M. Hadamard abandonna la voie dans laquelle il avait obtenu de si brillants résultats; aussi la question resta-t-elle plusieurs années sans faire de progrès.

Récemment M. Fabry a repris la méthode de M. Hadamard et a montré, dans une série de fort savants Mémoires (3), qu'il était possible d'étendre considérablement le champ des résultats.

Nous avons tenu à donner ces renseignements historiques; mais les recherches de MM. Darboux, Hadamard et Fabry ne se rattachent qu'indirectement à la théorie des séries divergentes qui est l'objet de ce Livre; aussi nous contenterons-nous de les avoir signalées, pour nous attacher à l'étude des méthodes qui dérivent de cette théorie (4). Nous indiquerons d'abord les propositions

(1) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor* (*Journal de M. Jordan*, 1892).

(2) HADAMARD, *Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de M. Jordan*, 1893). Pour la place que tiennent les travaux de M. Hadamard dans la théorie, on peut consulter mes *Leçons sur les fonctions entières*.

(3) *Annales de l'École Normale*, 1896; *Journal de Mathématiques*, 1898; *Acta mathematica*, t. XXII.

(4) Je laisse de côté d'autant plus volontiers les recherches de M. Hadamard et de M. Fabry que leurs principaux résultats, ainsi que leurs rapports avec les autres recherches sur la question, sont magistralement exposés par M. Hadamard dans son Ouvrage *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Carré

qui découlent directement des résultats obtenus précédemment sur les séries absolument sommables; nous donnerons ensuite quelques indications sur les recherches de M. Leau et de M. Le Roy, qui ont été suggérées par la théorie des séries sommables, mais qui pourraient être exposées d'une manière indépendante.

Dans l'étude des applications de la théorie des séries sommables, nous nous bornerons à la méthode exponentielle; des considérations analogues s'appliqueraient, *mutatis mutandis,* à ses généralisations.

Nous avons vu que, si l'on considère une série de Taylor

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

et la fonction entière associée

$$\mathrm{F}(az) = u_0 + \frac{u_1 az}{1} + \frac{u_2 a^2 z^2}{2!} + \ldots,$$

les intégrales

$$\int_0^\infty e^{-a}|\mathrm{F}^{(\lambda)}(az)|\,da \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

ont un sens pour les points z intérieurs au polygone de sommabilité et n'en ont pas pour les points extérieurs. Nous nous bornerons à considérer l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-a}|\mathrm{F}(az)|\,da; \tag{1}$$

des considérations analogues s'appliqueraient aux autres; mais il n'y aura généralement aucun avantage à les utiliser pour la recherche des points singuliers.

Si l'intégrale (1) a un sens, on peut affirmer que le produit

$$e^{-a}|\mathrm{F}(az)|$$

tend vers zéro lorsque a augmente indéfiniment par valeurs réelles positives. Si l'on pose, comme plus haut,

$$z = \rho e^{i\theta},$$
$$a\rho = b,$$

---

et Naud, 1901) dont il m'avait parlé pendant que j'écrivais celui-ci et dont il a bien voulu me communiquer les épreuves pendant que je corrigeais les miennes. Cet Ouvrage contient une excellente Bibliographie, que j'ai connue malheureusement trop tard pour pouvoir l'utiliser, mais que je tiens à signaler.

on pourra dire que le produit

$$e^{-\frac{b}{\rho}}|F(be^{i\theta})|$$

tend vers zéro lorsque b augmente indéfiniment par valeurs réelles positives (car ρ est réel et positif).

D'autre part, si l'intégrale (1) est dépourvue de sens, on peut affirmer que le produit

$$a^2e^{-a}|F(az)|$$

ne reste pas fini lorsque a augmente indéfiniment par valeurs réelles positives [1]; il en est évidemment de même du produit

$$b^2e^{-\frac{b}{\rho}}|F(be^{i\theta})|;$$

or si le point $z = \rho e^{i\theta}$ est *extérieur* au polygone de sommabilité, il existe certainement un nombre ρ_1 inférieur à ρ tel que le point $z = \rho_1 e^{i\theta}$ soit aussi extérieur à ce polygone; donc le produit

$$b^2e^{-\frac{b}{\rho_1}}|F(be^{i\theta})|$$

ne reste pas fini lorsque b augmente indéfiniment par valeurs réelles et positives.

Mais ρ_1 étant inférieur à ρ, il est clair que l'on a, pour les valeurs de b dépassant un nombre déterminé,

$$b^2e^{-\frac{b}{\rho_1}} < e^{-\frac{b}{\rho}};$$

donc le produit

$$e^{-\frac{b}{\rho}}|F(be^{i\theta})|$$

ne reste pas fini lorsque le point $z = \rho e^{i\theta}$ est extérieur au polygone de sommabilité.

Ces résultats étant établis, donnons à θ une valeur fixe et cherchons à déterminer le point du polygone de sommabilité situé sur la demi-droite dont tous les points ont pour argument θ. Soit ρ_0

---

(1) Il est essentiel d'observer que nous ne pouvons pas affirmer que ce produit *augmente indéfiniment* avec a; il peut prendre des valeurs alternativement grandes et petites; ce qui est certain, c'est qu'il ne pourrait exister de nombre M tel que ce produit soit constamment inférieur à M.

la valeur de ρ correspondante. Nous savons que le produit

$$e^{-\frac{b}{\rho}}|F(be^{i\theta})|,$$

lorsque b augmente indéfiniment par valeurs positives, tend vers zéro si l'on a

$$\rho < \rho_0$$

et ne reste pas fini si l'on a

$$\rho > \rho_0.$$

Dans le premier cas, on a, à partir d'une certaine valeur de b,

$$(2) \qquad |F(be^{i\theta})| < e^{\frac{b}{\rho}},$$

tandis que dans le second cas il existe une infinité de valeurs de b croissant indéfiniment pour lesquelles cette inégalité n'est pas vérifiée. Il en est de même de l'inégalité

$$\log|F(be^{i\theta})| < \frac{b}{\rho},$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \frac{1}{b}\log|F(be^{i\theta})| < \frac{1}{\rho}.$$

Désignons, pour un instant, par $\varphi(b)$, le premier membre de l'inégalité (3); lorsque b augmente indéfiniment par valeurs réelles positives, $\varphi(b)$ est constamment inférieur à $\frac{1}{\rho}$, si l'on a $\rho < \rho_0$; au contraire, si l'on a $\rho > \rho_0$, $\varphi(b)$ prend une infinité de valeurs supérieures à $\frac{1}{\rho}$. Il en résulte qu'il existe une infinité de valeurs de $\varphi(b)$, correspondant à des nombres b croissant indéfiniment et ayant pour limite $\frac{1}{\rho_0}$; il n'existe pas une telle suite si l'on remplace $\frac{1}{\rho_0}$ par un nombre plus grand; il peut en exister si l'on remplace $\frac{1}{\rho_0}$ par un nombre plus petit. On peut exprimer ce fait en disant que $\frac{1}{\rho_0}$ est la plus grande des limites de $\varphi(b)$ pour b infini; au lieu d'employer cette expression de Cauchy, on pourra dire avec M. Hadamard (1) que $\frac{1}{\rho_0}$ est la limite supérieure de $\varphi(b)$ pour b infini et écrire, en employant une notation due à M. Pringsheim (2),

$$\frac{1}{\rho_0} = \overline{\lim}\, \frac{1}{b} \log |F(be^{i\theta})|.$$

Cette formule fait connaître un point de contour du polygone de sommabilité, le point

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta}.$$

On pourra donc, dans les cas où la fonction $F(t)$ sera assez simple pour que la formule soit pratiquement applicable, déterminer le contour du polygone de sommabilité, ce qui fera connaître un certain nombre des points singuliers de la fonction. Si tous les côtés du polygone sont rectilignes, les perpendiculaires abaissées des polygones sur ces côtés feront connaître des points singuliers; s'il y a des côtés curvilignes, leurs courbes podaires sont des lignes singulières essentielles pour $\varphi(z)$.

On voit que la valeur de ρ_0 dépend de la manière dont se comporte la fonction $F(t)$ sur une demi-droite issue de l'origine; lorsque la direction de cette droite varie d'une manière continue, ρ_0 varie aussi d'une manière continue, puisque, d'après la définition du polygone de sommabilité, aucun des côtés de ce polygone ne passe par l'origine. Il serait intéressant de rechercher si cette propriété de continuité, qui appartient aux fonctions entières $F(t)$ associées à une série de Taylor $\varphi(z)$ (à rayon de convergence non nul), appartient aussi à d'autres fonctions entières; on remplacerait au besoin le facteur $\frac{1}{b}$ par $\frac{1}{b^\alpha}$, α étant un nombre quelconque. Une autre question, suggérée par ce résultat, est la suivante : Dans la formule qui donne ρ_0, peut-on remplacer le nombre fixe θ

(1) Thèse, p. 4. M. Hadamard ne définit la *limite supérieure pour m infini* que dans le cas d'une suite discrète $u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$; ses considérations et sa définition s'étendent immédiatement au cas d'une variable continue.

(2) Cette formule a été donnée, pour la première fois, par M. Servant dans le Mémoire cité p. 94. Mais, pour la démontrer rigoureusement, il était nécessaire d'établir qu'une série $\varphi(z)$ *n'est pas* absolument sommable en dehors de son polygone de sommabilité, ce que nous avons fait plus haut.

par un nombre θ' qui soit fonction de b et tende vers θ lorsque b augmente indéfiniment? Cela reviendrait à supposer que l'on étudie la fonction $F(t)$ sur une courbe ayant pour direction asymptotique la direction θ, au lieu de l'étudier sur la demi-droite passant par l'origine et parallèle à cette direction; cette hypothèse pourrait être plus commode dans certaines applications.

Nous allons indiquer maintenant une proposition qui permet de simplifier le calcul de l'expression

$$\frac{1}{\rho_0} = \overline{\lim} \frac{1}{|t|} \log|F(t)|, \qquad t = be^{i\theta}, \quad \theta \text{ fixe.}$$

Supposons, pour simplifier les calculs, que l'on donne à t la valeur Rn, n étant un entier et R le rayon de convergence de $\varphi(z)$; nous allons montrer que *la valeur de* ρ_0 *n'est pas modifiée si l'on conserve dans* $F(t)$ *seulement les termes dont le rang est compris entre* $\frac{n}{p}$ *et* $3n$, *le nombre positif* p *étant assujetti simplement à croître indéfiniment avec* n, *suivant une loi d'ailleurs quelconque*. Si, d'ailleurs, au lieu de se proposer de déterminer ρ_0, on se propose simplement de rechercher si un point donné à l'avance est intérieur ou extérieur au polygone de sommabilité, *on pourra prendre pour* p *une valeur fixe* ne dépendant que du rapport entre le module de ce point et le rayon du cercle de convergence de $\varphi(z)$.

Pour démontrer les propositions précédentes, remarquons que, si l'on désigne par R le rayon du cercle de convergence de la série

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots$$

et par R' un nombre inférieur à R, il existe un nombre M tel que l'on ait

$$|u_n| < \frac{M}{R'^n}, \qquad n = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots .$$

Ces inégalités peuvent être remplacées par la formule unique [1]

$$\varphi(z) \ll M\left[1 + \frac{z}{R'} + \left(\frac{z}{R'}\right)^2 + \left(\frac{z}{R'}\right)^3 + \ldots\right].$$

---

[1] Le signe $\ll$, introduit par M. Poincaré, doit toujours séparer deux séries de puissances *dont la seconde est à coefficients positifs*. Il exprime que le module de chaque coefficient de la première série est inférieur au coefficient

Si nous considérons maintenant la fonction entière associée $F(t)$ nous obtiendrons

$$F(t) \ll M\left[1 + \frac{t}{R'} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t}{R'}\right)^2 + \ldots\right].$$

Nous poserons $t = R'x$, et l'on pourra écrire

$$F(R'x) \ll M e^x.$$

Il s'agit d'évaluer l'erreur que l'on commet, lorsque, dans le calcul de $F(t)$, pour (¹)

$$|t| = |R'x| = R'n,$$

on néglige les termes dont le rang est inférieur à $\frac{n}{p}$ ou supérieur à $3n$; il faut donc calculer la somme de ces termes; le module de cette somme est évidemment inférieur à la somme des termes correspondants du second membre, pour

$$x = n,$$

ces termes étant tous positifs. Or il est aisé de trouver une limite supérieure de cette somme.

Occupons-nous d'abord des termes dont le rang est inférieur ou égal à $\frac{n}{p}$; le plus grand d'entre eux est évidemment celui dont le rang est le plus élevé, c'est-à-dire, en supposant, pour éviter des complications de calcul inutiles et sans intérêt, que $\frac{n}{p}$ est un nombre entier

$$\frac{x^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!},$$

---

correspondant de la seconde (*Voir* Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste,* t. I).

La relation $\varphi(z) \ll \psi(z)$ peut s'énoncer : $\varphi(z)$ admet $\psi(z)$ pour fonction majorante.

(¹) On remarquera que le rapport $\frac{R'}{R}$ peut être supposé aussi voisin de l'unité que l'on veut (il faut le supposer fixe, bien entendu). Dès lors, la substitution R′ à R est sans importance.

ou, pour $x = n$

$$\frac{n^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!}.$$

Or, la théorie de la fonction Γ nous apprend que l'on a, avec une approximation d'autant plus grande que m est plus grand [1]:

$$m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}.$$

On se rendra aisément compte qu'il est légitime d'employer cette valeur approchée dans les calculs que nous allons faire; on peut même supprimer sans inconvénient le facteur $\sqrt{2\pi m}$, ce qui abrégera l'écriture; en le rétablissant dans toutes les formules, le lecteur verra que sa suppression est sans importance, ce qui légitime, *à fortiori,* la suppression du facteur plus petit qui transformerait la formule d'approximation en formule exacte. Nous allons donc écrire des égalités approchées; pour les transformer en égalités exactes il suffirait de multiplier les seconds membres par $1 + \varepsilon_n$, ε_n tendant vers zéro pour n infini. Nous avons ainsi

$$\frac{n^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)!} = \frac{n^{\frac{n}{p}}}{\left(\frac{n}{p}\right)^{\frac{n}{p}} e^{-\frac{n}{p}}} = (ep)^{\frac{n}{p}} = e^{n\frac{1+\log p}{p}}.$$

La somme des $\frac{n}{p}$ premiers termes de la série e^x est donc, pour $x = n$, inférieure au produit par $\frac{n}{p}$ par le terme le plus grand, c'est-à-dire inférieure à

$$\frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)}.$$

Occupons-nous maintenant des termes dont le rang dépasse $3n$. Le terme de rang $3n$ a pour valeur approchée

$$\frac{n^{3n}}{3n!} = \frac{n^{3n}}{(3n)^{3n} e^{-3n}} = \left(\frac{e}{3}\right)^{3n}.$$

---

(1) *Voir* p. 21.

La somme des n termes dont le rang est compris entre $3n$ et $4n - 1$ est donc inférieure à

$$n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n};$$

de même la somme des n termes dont le rang est compris entre $4n$ et $5n - 1$ est inférieure à

$$n\left(\frac{e}{3}\right)^{4n}$$

et ainsi de suite. La somme des termes dont le rang dépasse $3n$ est donc inférieure à

$$n\left[\left(\frac{e}{3}\right)^{3n} + \left(\frac{e}{3}\right)^{4n} + \left(\frac{e}{3}\right)^{5n} + \ldots\right],$$

c'est-à-dire à

$$n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n} \frac{1}{1 - \left(\frac{e}{3}\right)^{n}} < 2n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n},$$

du moment que l'on suppose

$$\left(\frac{e}{3}\right)^{n} < \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$n > \frac{2}{\log 3},$$

ce qui est légitime.

En résumé, la somme des termes négligés dans la série e^x est inférieure à

$$\frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)} + 2n\left(\frac{e}{3}\right)^{3n}.$$

Le second terme est d'ailleurs inférieur à 1 dès que n dépasse une certaine limite, et peut être négligé; on en conclut que, *lorsque l'on ne conserve dans* $\mathrm{F}(t)$, *pour* $|t| = n\mathrm{R}'$, *que les termes dont le rang est compris entre* $\frac{n}{p}$ *et* $3n$, *on commet une erreur dont le module est inférieur à*

$$\mathrm{M}\frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)}.$$

Par suite, dans le calcul de

$$\frac{1}{|t|}\log|\mathrm{F}(t)|,$$

on commet une erreur dont le module est inférieur à

$$\frac{1}{nR'}\left[\log n + \log M - \log p + n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)\right]$$

et cette expression tend évidemment vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, si l'on suppose que p augmente aussi indéfiniment. Notre première proposition est donc démontrée.

Pour démontrer la seconde, remarquons que, pour reconnaître si le point $z = \rho e^{i\theta}$ est extérieur ou intérieur au polygone de sommabilité, on doit étudier l'expression

$$e^{-\frac{|t|}{\rho}}|F(t)|$$

lorsque t augmente indéfiniment sur la demi-droite qui correspond à la direction θ. L'erreur commise dans le calcul de cette expression, lorsque $|t| = nR'$, est inférieure à

$$e^{-\frac{nR'}{\rho}} M \frac{n}{p} e^{n\left(\frac{1+\log p}{p}\right)}.$$

On voit qu'elle tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment si le nombre p est tel que l'on ait

$$\frac{1+\log p}{p} - \frac{R'}{\rho} < 0,$$

et l'on peut toujours choisir un nombre p satisfaisant à cette relation. D'ailleurs, il est clair que si l'on a

$$\frac{1+\log p}{p} - \frac{R}{\rho} < 0,$$

l'égalité étant exclue, on peut toujours choisir le nombre R', inférieur à ρ, assez voisin de ρ pour que l'inégalité reste vérifiée lorsqu'on y remplace R par R'; le nombre p ne dépend donc, comme nous l'avions annoncé, que du rapport $\frac{R}{\rho}$ [1].

---

[1] J'ai appliqué, pour la première fois, dans un cas particulier, la méthode précédente dans mon Mémoire *Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure* (*Journal de M. Jordan,* 1896). J'ai indiqué ensuite le principe général de la méthode dans une note *Sur les séries de Taylor* (*Comptes rendus,* 14 décembre 1896), mais en indiquant des limites beaucoup trop larges pour les termes à conserver; il était d'ailleurs indifférent, pour la proposition que je désirais démontrer, que ces limites fussent plus ou moins res-

Pour donner une application de la méthode précédente, nous allons démontrer qu'*une série de Taylor admet, en général, le cercle de convergence comme coupure.*

Cette proposition a été énoncée pour la première fois par M. Pringsheim [1]; il est d'ailleurs clair qu'elle n'a un sens précis que si l'on définit les mots *en général* qui figurent dans son énoncé et qui n'ont, en eux-mêmes, aucune signification déterminée. Nous adopterons la définition suivante : une série de Taylor sera dite *générale* si la valeur du $n^{\text{ième}}$ coefficient est indépendante de la valeur des coefficients précédents.

Cela posé, nous remarquerons qu'il existe au moins un point singulier sur le cercle de convergence; il existe donc au moins un argument α tel que l'on ait

$$\overline{\lim}\frac{1}{b}\log|F(be^{i\alpha})| = \frac{1}{R},$$

en désignant par $\frac{1}{R}$ le rayon de convergence de $\varphi(z)$. Il existe donc une suite de nombres

$$b_1,\quad b_2,\quad \ldots,\quad b_n,\quad \ldots$$

croissant indéfiniment avec leur indice et tels que l'on ait

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{b_n}\log|F(b_n e^{i\alpha})| = \frac{1}{R}.$$

Nous pouvons, pour éviter des complications d'écriture, admettre que les nombres b_n sont entiers; nous pouvons, de plus, en supprimant, s'il est nécessaire, un nombre quelconque d'entre eux, admettre que l'on a

$$3b_{n-1} < \frac{b_n}{2},\qquad n = 2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots.$$

Désignons par

$$P_n(t)$$

---

serrées; l'essentiel était qu'il y en eût. Nous verrons bientôt que, dans un problème équivalent, M. Leau a énoncé le principe de la méthode sous une forme tout à fait générale et obtenu, pour les termes à conserver, des limites qui se rapprochent beaucoup de celles du texte.

[1] *Mathematische Annalen*, t. XLIV. J'ai fait, à propos de la démonstration de M. Pringsheim, dans mon *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 58, 59, quelques remarques qu'il est inutile de répéter ici.

l'ensemble des termes de $F(t)$ dont le rang est compris entre

$$\frac{b_n}{2} \quad \text{et} \quad 3b_n.$$

Les inégalités précédentes expriment que chaque coefficient de $\varphi(z)$ figure dans *un seul* des polynomes

$$P_1(t), \quad P_2(t), \quad \ldots, \quad P_n(t), \quad \ldots.$$

Il résulte d'ailleurs des propositions précédentes que l'on a [1]

$$\overline{\lim} \frac{1}{b_n} \log |P_n(b_n e^{i\alpha})| = \frac{1}{R}. \tag{1}$$

Il nous suffit de prouver, pour établir notre proposition, que si la série $\varphi(z)$ est générale, on peut, étant donné un argument quelconque β, choisir parmi les b_n une infinité de nombres

$$b_{n_1}, \quad b_{n_2}, \quad \ldots, \quad b_{n_p}, \quad \ldots, \tag{2}$$

tels que l'on ait

$$\overline{\lim} \frac{1}{b_{n_p}} \log |P_{n_p}(b_{n_p} e^{i\beta})| = \frac{1}{R}. \tag{3}$$

Dans ce but, nous remarquerons que, si l'on multiplie par $e^{i\theta}$ tous les coefficients de $\varphi(z)$ (c'est-à-dire tous les coefficients des P_n) et si l'on remplace α par $\alpha - \theta$, la formule (1) n'est pas altérée. Si d'ailleurs on effectue l'opération précédente seulement sur les coefficients d'une infinité de polynomes P_n, ayant pour indices les nombres (2), on aura la formule (3) si l'on pose

$$\beta = \alpha - \theta.$$

Or, nous avons déjà remarqué que chaque coefficient de $\varphi(z)$ figure dans un seul des polynomes P_n ; si l'on suppose ces coefficients indépendants, leurs arguments ne sont liés par aucune relation et, par suite, on peut supposer que, pour une infinité d'entre eux, θ a une valeur quelconque donnée d'avance, c'est-à-dire que tout point β est singulier [2].

---

[1] En effet, si dans la formule de la page 146, on prend $\rho = R$, on peut supposer $p = 2$.

[2] On peut rendre plus précis le raisonnement précédent en faisant voir que, si l'on désigne par θ_n la valeur de l'argument de z pour laquelle le polynome P_n

Nous bornerons là les applications de la méthode de sommation exponentielle à la recherche des points singuliers, et nous allons, pour terminer, dire quelques mots des recherches de MM. Leau et Le Roy.

Les recherches de M. Leau peuvent être considérées comme ayant pour but d'obtenir des caractères de sommabilité analogues aux caractères de convergence.

L'étude de la convergence des séries repose essentiellement sur leur comparaison avec d'autres séries simples et déjà connues. Cette comparaison se trouve possible parce qu'en réalité la convergence d'une série ne dépend que du terme général considéré isolément. M. Leau s'est demandé si, d'une manière analogue, l'extension possible d'une fonction représentée par une série de Taylor ne pourrait pas se déduire de la comparaison de cette série avec d'autres représentant des fonctions déjà connues. Il a exposé ses recherches dans le *Journal de M. Jordan* [1].

Étant donnée nne série

$$f(z) = \Sigma a_p z^p, \tag{1}$$

afin de voir s'il y a sur un arc PQ de son cercle de convergence des points singuliers, prenons sur le rayon bissecteur de cet arc un point $B(z = b)$. Pour qu'il n'y ait pas de points singuliers sur l'arc entre P et Q, il faut et il suffit que l'on puisse choisir $|b|$ assez petit pour que le rayon de convergence de la nouvelle série

$$\sum \frac{1}{n!} f(b) z^n, \tag{2}$$

soit au moins égal à BP.

Or l'inverse de ce rayon est la plus grande des limites de

---

a le plus grand module, lorsqu'on suppose $|z| = b_n$, tous les points limites de la suite

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_n, \quad \ldots$$

sont des points singuliers; si l'on marque sur le cercle de convergence tous les points $e^{i\theta_n}$ et si la série est *générale*, l'ensemble de ces points est *dense* sur tout arc de ce cercle et, par suite, tous les points du cercle sont singuliers. (Voir *Acta mathematica*, t. XXI, p. 243.)

[1] *Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. V, 1899).

l'expression

$$(3)\qquad \sqrt[n]{\frac{1}{n!}\,|f^{(n)}_{(b)}|} = \sqrt[n]{\left|\sum_{p=n}^{p=\infty}\frac{p!}{n!(p-n)!}\,a_p b^{p+n}\right|}.$$

Cette expression fait intervenir, en apparence du moins, la totalité des coefficients a. M. Leau a démontré (¹) que l'on ne change pas la plus grande des limites de l'expression (3), si l'on se borne à faire varier, dans la formation de la dérivée, p de n à n', $\frac{n'}{n}$ restant supérieur à un nombre fixe plus grand que 1, du moins dès que $|b|$ est assez petit, ce que l'on peut toujours supposer (²).

En d'autres termes, il existe des suites de nombres dépendant de b et d'un entier n,

$$\alpha_{nn},\quad \alpha_{n+1,n},\quad \ldots,\quad \alpha_{n',n},$$

telles que la solution du problème dépend de la plus grande des limites de

$$|\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n+1,n}a_{n+1} + \ldots + \alpha_{n',n}a_{n'}|^{\frac{1}{n}},$$

c'est-à-dire du $n^{\text{ième}}$ *ensemble des coefficients* $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n'}$. Cette expression

$$\alpha_{nn}a_n + \ldots + \alpha_{n'n}a_{n'},$$

qui joue dans l'extension des séries un rôle analogue à celui du terme général pour la convergence, nous l'appelons le *terme général étendu* relatif à l'arc PQ ; n sera son rang et n' son indice.

Une simplification semblable s'obtient lorsque l'on cherche si la fonction $f(z)$ est holomorphe le long d'une ligne L allant de l'origine O à un point P du plan. Théoriquement, il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'on puisse trouver une file de cercles empiétant successivement les uns sur les autres, dont les centres sont distribués sur L de O à P, et tels que les développements de $f(z)$ relatifs aux centres successifs convergent dans les

(¹) Dans sa Thèse, M. Hadamard avait déjà fait, relativement à l'expression (3), des calculs ayant pour conséquence que les termes qui dépassent un certain rang n' sont négligeables. *Voir* aussi la note p. 146.

(²) Pour cette démonstration, comme pour plusieurs autres, dont le détail est assez long, nous renverrons au Mémoire de l'auteur.

cercles correspondants. Si nous désignons les centres par O, O_1, O_2, …, O_s (ou P), et par $\Sigma a_{nh} z^n$ le développement, supposé possible, au point O_h, la conception précédente oblige à former successivement les expressions

$$a_{n,h+1} = c_n a_{n,h} + c_{n+1} a_{n+1,h} + \ldots, \tag{4}$$

les quantités c_n, c_{n+1}, … ne dépendant pas de la fonction $f(z)$, mais de n et du segment $O_h O_{h+1}$; puis à voir quelles sont, pour les valeurs successives de h, les plus grandes limites des $|a_{n,h+1}|^{\frac{1}{n}}$, pour n infini.

Or, on ne change pas les plus grandes limites de ces expressions si, sous certaines conditions, on substitue, dans le calcul des $a_{n,h+1}$, aux séries (4) des polynomes

$$c_n a'_{n,h} + c_{n+1} a'_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a'_{\varphi_{h+1}(n),h}, \tag{5}$$

$a'_{n,h}$, …, $a'_{\varphi_{h+1}(n),h}$ désignant des valeurs approchées de $a_{n,h}$, …, $a_{\varphi_{h+1}(n),h}$ qui ont été eux-mêmes précédemment calculés d'une manière inexacte. Ainsi, les quantités a'_{n1}, a'_{n2}, …, a'_{np}, … s'expriment en fonction linéaire et homogène des quantités a_n, a_{n+1}, …, $a_{n'}$; ces polynomes sont les termes étendus relatifs à la ligne L et à la file de cercles considérée. On parvient ainsi à la conclusion suivante :

Le problème, holomorphisme le long de L, ne dépend que des suites des termes généraux étendus de rang n, relatives aux files de cercles. Plus simplement encore, il ne dépend que de la suite des $n^{\text{ièmes}}$ ensembles des coefficients de la série

$$\Sigma a_p z^p;\ a_n,\ \ a_{n+1},\ \ a_{n'}.$$

Mais, et c'est la différence essentielle entre ce nouveau résultat et celui qui avait trait à un arc du cercle de convergence, le rapport de l'indice n' au rang n de l'ensemble doit être infini avec n, pour que les conclusions soient valables.

Ces remarques fort simples conduisent à des applications très intéressantes.

Formation de séries ayant des points singuliers connus. — Voici, en le particularisant, un exemple donné par M. Leau. Soit $\Sigma a_p z^p$ une série pour laquelle le point d'affixe -1 est singulier. Le terme général, étendu par rapport à ce point, étant désigné par u_n, supposons que la suite $|u_n|^{\frac{1}{n}}$, $|u_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}$, ... ait pour limite $\frac{1}{1-b}$, b ayant la même signification que tout à l'heure. La série

$$\Sigma a_p e^{-2i\pi p\omega} z^p \tag{6}$$

présente les mêmes particularités pour $z = e^{2i\pi\omega}$. Empruntons une infinité d'ensembles de coefficients, sans éléments communs, à autant de séries (6) que nous voudrons; la série formée représente une fonction ayant tous les points $z = e^{2i\pi\omega}$ correspondants comme points singuliers.

Formation de fonctions holomorphes dans une région. — Soit une ligne L issue de l'origine, et supposons que l'on ait des séries

$$f_1(z) = \Sigma a_{p1} z^p, \qquad f_2(z) = \Sigma a_{p2} z^p, \qquad \ldots, \qquad f_k(z) = \Sigma a_{pk} z^p, \qquad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles représentent des fonctions holomorphes dans une aire qui comprend L, les distances des points de la ligne au contour de l'aire admettant un minimum différent de zéro;

2° Les modules des fonctions ont, dans la région considérée, une limite supérieure finie;

3° Dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang varie de n à $\varphi(n)$, $\frac{\varphi(n)}{n}$ devenant infiniment grand avec n, admettent comme termes majorants ceux d'une certaine série fixe, convergente dans un cercle qui comprend L à son intérieur.

On peut dire que les fonctions forment une famille de séries *tangentes le long des polynomes* formés, pour f_n et f_{n+1}, des termes dont l'indice va de n à $\varphi(n)$.

Toute série dont les termes sont des termes de polynomes de contact représente une fonction holomorphe le long de L.

La démonstration repose sur ce fait que les termes étendus d'une pareille série ne diffèrent de ceux d'une fonction f que d'assez peu pour ne pas modifier les plus grandes limites des racines $n^{\text{ièmes}}$ de leurs modules.

Parmi les conséquences de ce théorème, je me borne à citer deux cas particuliers :

1° *Si la fonction $g(t)$ est holomorphe à l'origine, la fonction*

$$f(z) = \Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$$

n'a à distance finie que le point singulier $+1$.

2° *Si la fonction entière $g(t)$ est d'ordre inférieur à* 1, *ou, si étant d'ordre* 1, *son module maximum pour $|t| = r$, élevé à la puissance $\frac{1}{r}$, a l'unité pour plus grande limite, la fonction*

$$f(z) = \Sigma g(n) z^n$$

n'a également que le point singulier $+1$ *à distance finie.*

Les résultats précédents sont très intéressants, car ils nous montrent combien est particulier le cas où l'on suppose que la forme analytique de a_n, considérée comme fonction de n, est connue. Il est cependant toujours possible de supposer que a_n est une fonction entière de n; mais les conséquences de cette remarque n'ont guère été étudiées (¹).

Dans cet ordre d'idées, signalons le résultat suivant dû à M. Le Roy (²) :

Si a_n est une fonction de n holomorphe dans un angle (si petit qu'il soit) contenant à son intérieur la partie positive de l'axe OX des quantités réelles et si la série $\Sigma a_n z^n$ conserve le même cercle de convergence (de rayon 1) quand on remplace n par l'affixe d'un point situé dans l'angle précédent, la série en question ne peut avoir de points singuliers que sur la coupure $+1$, $+\infty$ de OX.

La méthode de M. Le Roy paraît être une combinaison des méthodes dérivées de la théorie des séries divergentes sommables, et de la méthode de M. Lindelöf dont nous allons dire quelques mots; mais nous devons nous borner à ces indications, le Mémoire

(¹) *Voir* Borel, *Comptes rendus,* t. CXXVII, p. 1001.
(²) *Comptes rendus,* t. CXXVII, p. 948.

dans lequel M. Le Roy développe ses Notes des *Comptes rendus* n'ayant pas encore paru [1].

La méthode de M. Lindelöf repose essentiellement sur l'emploi de la représentation conforme; M. Lindelöf a étudié surtout [2] la transformation d'Euler

$$x = \frac{y}{1+y},$$

pour laquelle les coefficients des séries ordonnées suivant les

---

([1]) Pendant que j'achevais de corriger les épreuves de ce Livre, M. Le Roy a bien voulu me communiquer les épreuves de son Mémoire [*Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2e série, t. II, p. 317-430)]. J'ai à peine eu le temps de les parcourir, et il m'a été impossible de remanier mon texte; je me suis contenté de renvoyer, là où ce remaniement aurait été nécessaire, au résumé très sommaire que je vais essayer de donner ici de cet intéressant travail :

Le problème principal que se pose M. Le Roy est le suivant : *Chercher à déduire les propriétés d'une fonction analytique des propriétés de son développement de Taylor;* c'est le problème que M. Hadamard a été le premier à étudier dans sa généralité. M. Le Roy emploie d'abord des méthodes qui sont une généralisation de la théorie des séries sommables; il se sert ensuite de la représentation conforme et aussi d'intégrales définies qui généralisent à la fois les intégrales de Stieltjes (Chap. II) et certaines intégrales étudiées par M. Hadamard dans la troisième Partie de sa Thèse; ces intégrales représentent des fonctions affectées de coupures, soit naturelles, soit artificielles, que l'on étudie aisément par une méthode connue (HERMITE, *Cours d'Analyse*, 4e édition, 16e Leçon). Ces diverses méthodes conduisent M. Le Roy à de nombreux théorèmes, faisant connaître les points singuliers dans le cas où le coefficient de z^n, considéré comme fonction de n, a une forme analytique déterminée, rentrant dans certains types simples. Ces résultats se rattachent d'ailleurs plutôt au problème de M. Darboux : *Déterminer les coefficients, connaissant les singularités,* qu'au problème de M. Hadamard : *Déterminer les singularités, connaissant les coefficients.*

M. Le Roy s'occupe ensuite de la solution du problème que nous avons signalé au Chapitre II, à propos de la méthode de Stieltjes généralisée; il donne le moyen de déterminer la fonction qui correspond à certaines *séries de Stieltjes,* dans lesquelles c_n a une forme analytique particulière, en fonction de n.

La fin du Mémoire est consacrée à l'étude des rapports qu'il y a entre les résultats précédents et la théorie des séries divergentes; M. Le Roy indique comment ses recherches ont été entreprises dans le but de généraliser la théorie des séries sommables; il montre ensuite comment les considérations qui ont été développées dans mon *Mémoire sur les séries divergentes,* à propos des séries de Taylor à rayon de convergence nul, peuvent s'étendre aux cas où l'on remplace la méthode de sommation exponentielle par des modes de sommation plus généraux.

En terminant, M. Le Roy annonce son intention de poursuivre, dans d'autres Mémoires, l'étude des nombreuses questions qu'il serait encore nécessaire de résoudre, pour pouvoir multiplier les applications pratiques de ces diverses théories.

([2]) *Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 632.

puissances de x et de y sont liées par des lois simples. Cette transformation a été aussi appliquée par M. Pringsheim [1] à l'étude de certaines séries de Taylor, mais l'étude de ces questions nous éloignerait trop de notre sujet.

---

[1] *Ueber eine besondere Gattung von singulären Stellen analytischer Functionen*, § 3 (*Mathematische Annalen*, t. L, p. 455).

CHAPITRE V.

LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE POLYNOMES.

Le théorème de M. Mittag-Leffler.

Nous avons vu au Chapitre précédent que, étant donnée une fonction analytique définie par une série de Taylor

$$(1) \qquad \varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

la théorie des séries sommables permet de déduire de la série $\varphi(z)$ une expression simple de cette fonction, valable dans une région plus étendue que le cercle de convergence.

M. Mittag-Leffler s'est proposé de généraliser ce résultat et il est parvenu à une solution à la fois très élégante et aussi complète qu'on pouvait le désirer. Il est clair, en effet, que si l'on veut, comme il est naturel, se borner à considérer des expressions analytiques uniformes on doit, dans le cas où la fonction $\varphi(z)$ n'est pas uniforme, étudier seulement une branche déterminée de cette fonction, c'est-à-dire tracer dans le plan des coupures telles que $\varphi(z)$ soit uniforme, lorsqu'on assujettit la variable z à ne pas traverser ces coupures. La manière la plus simple de tracer ces coupures consiste à joindre le point $O(z = 0)$ à chaque point singulier de $\varphi(z)$ et à prolonger jusqu'à l'infini chacune de ces droites : *ces prolongements seront les coupures;* la figure géométrique ainsi obtenue est appelée *étoile* par M. Mittag-Leffler, de sorte que le problème résolu par lui peut être énoncé de la manière suivante : *trouver une expression de $\varphi(z)$ valable dans toute l'étoile.*

L'expression donnée par M. Mittag-Leffler est une série de polynomes : *cette série est uniformément convergente dans toute région intérieure à l'étoile,* c'est-à-dire dans toute région finie dont le contour n'a aucun point commun avec les coupures. Cette dernière condition est à peu près indispensable dans les applications; une condition analogue doit être vérifiée lorsque $\varphi(z)$ se présente comme la limite d'une expression dépendant d'un paramètre (continu ou discontinu); cette expression doit tendre *uniformément* vers sa limite [1].

Nous allons, dans ce premier paragraphe, exposer la méthode même de M. Mittag-Leffler; dans le paragraphe suivant, nous en indiquerons diverses généralisations; enfin, nous terminerons en indiquant comment ces diverses méthodes peuvent, sans modification essentielle, s'appliquer à certaines séries *dont le rayon de convergence est nul* et en recherchant quelles relations il y a entre les diverses considérations développées dans ce Chapitre et la théorie générale des séries divergentes.

Rappelons d'abord un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques; si l'on désigne par ρ un nombre positif tel que la fonction $\varphi(z)$ soit holomorphe à l'intérieur du cercle C, de rayon ρ et de centre x, et par g le maximum du module de $\varphi(z)$ sur le cercle, on a [2]

$$\left|\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}\right| < \frac{g}{\rho^n}. \tag{2}$$

Cette inégalité subsiste d'ailleurs, *a fortiori*, si l'on suppose que g désigne le maximum du module de $\varphi(z)$ sur un contour C' à l'intérieur duquel cette fonction est holomorphe, si tous les points de C sont intérieurs à C'. On sait, en effet, qu'une fonction harmonique régulière en un point ne peut être en ce point ni maximum ni minimum; il suffit d'appliquer ce théorème à $\log|\varphi(z)|$.

L'inégalité fondamentale permet de trouver aisément une limite

---

[1] C'est ainsi que, dans le cas de la méthode exponentielle, l'intégrale

$$\int_0^A e^{-a} F(az)\, da,$$

tend *uniformément* vers $\varphi(z)$, lorsque A augmente indéfiniment, dans toute région *intérieure* au polygone de sommabilité.

[2] On a en effet

$$\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}$$

et le module de l'intégrale est inférieur à

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{g|dz|}{\rho^{n+1}} = \frac{1}{2\pi}\frac{g\,2\pi\rho}{\rho^{n+1}} = \frac{g}{\rho^n}.$$

supérieure de l'erreur commise lorsque, dans le développement de Taylor de $\varphi^{(\mu)}(x+z)$, on s'arrête au terme de rang m. On a

$$\varphi^{(\mu)}(x+z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)}{n!} z^n.$$

On a évidemment

$$\left|\frac{\varphi^{(\mu+n)}(x) z^n}{n!}\right| < \left|\frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)}{(\mu+n)!}\right| (\mu+n)^\mu |z|^n < \frac{g}{\rho^\mu} (\mu+n)^\mu \left|\frac{z}{\rho}\right|^n.$$

Supposons que l'on ait

(3) $$\left|\frac{z}{\rho}\right| < \frac{1}{3}$$

et que m soit assez grand par rapport à μ pour que l'on ait, pour $m' > m$,

$$(\mu + m')^\mu \left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

c'est-à-dire

(4) $$\mu \log(\mu + m') < m'(\log 3 - \log 2).$$

On pourra alors écrire

(5) $$\varphi^{(\mu)}(x+z) = \sum_{0}^{m} \frac{\varphi^{(\mu+n)}(x)}{n!} z^n + \varepsilon_\mu$$

avec

(6) $$|\varepsilon_\mu| < \frac{g}{\rho^\mu} \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{g}{\rho^\mu 2^m}.$$

Ces inégalités fondamentales établies, désignons par X un domaine quelconque *intérieur* [1] à l'étoile relative à la fonction $\varphi(z)$; nous pouvons toujours supposer ce domaine X tel que son contour soit rencontré en un seul point par toute demi-droite issue de l'origine; sinon on le remplacerait par un domaine X' ayant cette dernière propriété, ce domaine X' étant intérieur à l'étoile et renfermant X à son intérieur [2].

---

[1] On entend par là, comme il a été déjà expliqué, que le contour de X reste à distance finie et n'a pas de point commun avec les lignes qui limitent l'étoile.

[2] Pour définir X' on peut se contenter de dire que, si x est intérieur à X, tous les points $x' = \theta x$, où θ est réel, positif et inférieur ou égal à *un*, seront

Le domaine X étant *intérieur* à l'étoile, le rayon de convergence du développement de $\varphi(z)$ relatif à un point x de X a un minimum ρ' certainement différent de zéro; car ce rayon varie d'une manière continue avec x et par suite atteint son maximum, puisque l'ensemble X est parfait; ce minimum ne peut donc pas être nul.

Désignons par ρ un nombre positif inférieur à ρ' et C l'ensemble des points obtenus en adjoignant aux points de X les points des cercles de rayon ρ ayant pour centres les divers points de X; soit g le maximum de $\varphi(z)$ dans le domaine C (ce maximum est atteint en un point du contour de C). Nous pourrons écrire l'inégalité (2), dans laquelle x sera un point quelconque intérieur à X et, par suite, les inégalités (3) et (4) entraîneront la relation (5) et l'inégalité (6).

Soit maintenant x un point quelconque intérieur à X; nous pouvons déterminer un nombre entier n tel que l'on ait

$$\frac{|x|}{n} < \frac{\rho}{3}; \tag{7}$$

nous supposerons le nombre n choisi de telle manière que cette inégalité soit vérifiée, quel que soit x intérieur à X, ce qui est possible puisque X est fini. Nous poserons

$$a = \frac{x}{n}, \qquad b = a + \frac{x}{n} = \frac{2x}{n}, \qquad c = b + \frac{x}{n} = \frac{3x}{n}, \qquad \ldots,$$

$$s = \frac{(n-2)x}{n}, \qquad t = s + \frac{x}{n} = \frac{(n-1)x}{n}, \qquad x = t + \frac{x}{n} = \frac{nx}{n}.$$

La méthode de M. Mittag-Leffler consiste essentiellement, pour calculer un polynome approché de $\varphi(x)$, à calculer des polynomes approchés des diverses quantités $\varphi^{(\mu)}(a)$, $\varphi^{(\mu)}(b)$, $\ldots$, $\varphi^{(\mu)}(t)$, pour des valeurs convenablement choisies de μ.

Nous utiliserons pour cela la relation fondamentale (5) avec les inégalités (3), (4), (6) qui la complètent. Si dans la relation (5)

---

intérieurs à X′. Le domaine X′ ainsi obtenu est tel que son contour est rencontré en général en un seul point par toute demi-droite issue de l'origine; il y a des demi-droites exceptionnelles dont les segments font partie du contour de X′; elles rencontrent donc ce contour en une infinité de points. Il serait d'ailleurs aisé de modifier X′ de manière à supprimer ces exceptions; ce n'est pas nécessaire ici.

nous remplaçons x par zéro et z par a ou $\frac{x}{n}$ l'inégalité (3) se réduit à (7), qui est supposée vérifiée, et nous obtenons

$$\varphi^{(\mu)}(a) = A_\mu + \alpha_\mu \tag{8}$$

en posant

$$A_\mu = \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_1)}(0)}{\lambda_1!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1},$$

$$|\alpha_\mu| < \frac{g}{\rho^{\mu}2^{n^{2n}}}. \tag{9}$$

Nous avons pris $m = n^{2n}$; l'inégalité (4) sera vérifiée si l'on suppose [1]

$$\mu \leqq 2n^{2n-2}.$$

Remplaçons maintenant dans (5) x par a et z toujours par $\frac{x}{n}$; il viendra

$$\varphi^{(\mu)}(b) = B'_\mu + \beta'_\mu,$$

en posant

$$B'_\mu = \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_2)}(a)}{\lambda_2!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_2},$$

$$|\beta'_\mu| < \frac{g}{\rho^{\mu}2^{n^{2n-2}}}.$$

Nous avons pris $m = n^{2n-2}$; l'égalité (4) sera vérifiée si l'on suppose $\mu < 2n^{2n-4}$.

Remplaçons dans l'expression de B'_μ les $\varphi^{(\mu+\lambda_2)}(a)$ par leurs valeurs (8), ce qui est possible puisque $\mu + \lambda_2$ est ici constamment inférieur à $2n^{2n-2}$; il viendra

$$B'_\mu = B_\mu + \beta''_\mu,$$

---

(1) En effet, pour $m' = 2^{2n}$, $\mu = 2n^{2n-2}$, cette inégalité devient

$$2\log(2n^{2n-2} + n^{2n}) < n^2(\log 3 - \log 2),$$

c'est-à-dire

$$\log n + \frac{1}{2n}\log\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) < n\,\frac{\log 3 - \log 2}{4}$$

et est visiblement vérifiée pour $n > 10$; l'inégalité (4) subsiste d'ailleurs *a fortiori* lorsqu'on augmente m' et qu'on diminue μ.

en posant

$$B_\mu = \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_1=n^{2n}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_1+\lambda_2)}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$\beta''_\mu = \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \frac{\alpha_{\mu+\lambda_2}}{\lambda_2!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_2},$$

d'où, en utilisant les inégalités (9),

$$|\beta''_\mu| < \sum_{\lambda_2=0}^{\lambda_2=n^{2n-2}} \frac{g}{2^{n^{2n}}\rho^{\mu+\lambda_2}} \frac{1}{\lambda_2!} \left|\frac{x}{n}\right|^{\lambda_2} < \frac{g}{2^{n^{2n}}\rho^\mu} \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_2!} \left(\frac{1}{3}\right)^{\lambda_2} = \frac{g}{2^{n^{2n}}\rho^\mu} e^{\frac{1}{3}}.$$

On a donc, en posant

$$\beta_\mu = \beta'_\mu + \beta''_\mu,$$

les relations

$$\varphi^{(\mu)}(b) = B_\mu + \beta_\mu, \tag{10}$$

$$|\beta_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-2}}}.$$

On calculera de même les quantités $\varphi^{(\mu)}(c)$; on posera

$$\varphi^{(\mu)}(c) = C'_\mu + \gamma'_\mu,$$

$$C'_\mu = \sum_{\lambda_3=0}^{n^{2n-4}} \frac{\varphi^{(\mu+\lambda_3)}(b)}{\lambda_3!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_3}$$

et l'on aura

$$|\gamma'_\mu| < \frac{g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-4}}}$$

en supposant ici $\mu \leqq 2n^{2n-6}$.

On remplacera dans C'_μ les $\varphi^{(\mu+\lambda_3)}(b)$ par leurs valeurs (10) et l'on obtiendra

$$C'_\mu = C_\mu + \gamma''_\mu$$

avec

$$C_\mu = \sum_{\lambda_3=0}^{n^{2n-4}} \sum_{\lambda_2=0}^{n^{2n-2}} \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \frac{\varphi^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\mu)}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\lambda_3!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3};$$

$$\gamma''_\mu = \sum_{\lambda_3=0}^{n^{2n-4}} \frac{\beta_{\mu+\lambda_3}}{\lambda_3!} \left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_3},$$

d'où

$$|\gamma''_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-2}}} \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda_3!}\,\frac{1}{\rho^{\lambda_3}}\left|\frac{x}{n}\right|^{\lambda_3} < \frac{3g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-4}}}$$

et, par suite,

$$|\gamma_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^{2n-4}}},$$

en posant

$$\gamma_\mu = \gamma'_\mu + \gamma''_\mu,$$

d'où

$$\varphi^{(\mu)}(c) = C_\mu + \gamma_\mu.$$

En procédant ainsi de proche en proche, on finira par obtenir

$$\varphi^{(\mu)}(t) = T_\mu + \tau_\mu,$$

en supposant $\mu \leqq 2n^2$ et en posant

$$T_\mu = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{n^4} \sum_{\lambda_{n-2}=0}^{n^6} \cdots \sum_{\lambda_2=0}^{n^{2n-2}} \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \frac{\varphi^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{n-1}+\mu}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_{n-1}!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}.$$

On a d'ailleurs

$$|\tau_\mu| < \frac{2g}{\rho^\mu 2^{n^4}}.$$

On déduit de là

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda_n=0}^{\lambda_n=n^2} \frac{\varphi^{(\lambda_n)}(t)}{\lambda_n!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n} + \eta'$$

avec, d'après (6), où l'on doit faire $\mu = 0$, $m = n^2$

$$|\eta'| < \frac{g}{2^{n^2}}.$$

En remplaçant les $\varphi^{(\lambda_n)}(t)$ par leur valeur, on obtient

$$\varphi(x) = g_n(x) + \eta' + \eta'',$$

en posant

$$g_n(x) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^{2n}} \sum_{\lambda_2=0}^{n^{2n-2}} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^2} \frac{\varphi^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)}(0)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_1+\ldots+\lambda_n},$$

$$\eta'' = \sum_0^{n^2} \frac{\tau_\mu}{\mu!}\left(\frac{x}{n}\right)^\mu.$$

En posant $\eta_n = \eta' + \eta''$, on obtient finalement

$$\varphi(x) = g_n(x) + \eta_n \tag{11}$$

avec [1]

$$(12) \qquad |\eta_n| < \frac{2g}{2^{n^2}}.$$

Les formules (11) et (12) nous donnent la solution complète du problème. Il ne faut pas oublier que l'inégalité (12) est vérifiée, quel que soit le domaine X choisi, intérieur à l'étoile, à partir d'une certaine valeur de n, laquelle ne dépend que de X. Dès lors si l'on pose

$$G_0(x) = g_0(x) = \varphi(0),$$
$$G_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x),$$
$$\varphi(x) = \sum_0^\infty G_n(x),$$

cette dernière série convergera pour tout point x intérieur à l'étoile. La convergence sera, de plus, *absolue et uniforme* à l'intérieur de tout domaine fini X, intérieur à l'étoile. En effet, le domaine X étant choisi, il existera une valeur fixe n, telle que, pour $n \geqq n'$, on aura, quel que soit x intérieur à X,

$$|G_n(x)| = |g_n - g_{n-1}| = |\varphi - g_n - (\varphi - g_{n-1})| < |\varphi - g_n| + |\varphi - g_{n-1}|,$$

c'est-à-dire

$$|G_n(x)| < |\eta_n| + |\eta_{n-1}| < \frac{3g}{2^{(n-1)^2}}.$$

Tel est le résultat fondamental de Mittag-Leffler; nous avons suivi, pour le démontrer, une marche tout à fait analogue à celle de son auteur [2]; nous verrons dans le paragraphe suivant comment on peut y arriver par une tout autre voie. Nous aurons ainsi des résultats susceptibles d'une généralisation qui n'aurait pu être obtenue en restant au point de vue de M. Mittag-Leffler; en effet,

---

[1] Cette valeur de η_n permettrait de simplifier un peu la seconde partie de mon Mémoire : *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica,* t. XXIV, p. 309).

[2] *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* (première Note) (*Acta mathematica,* t. XXIII, p. 43). On trouvera là une liste des autres Mémoires de M. Mittag-Leffler sur ce sujet.

Voir aussi Leau, *Représentation des fonctions par des séries de polynomes* (*Bulletin de la Société Mathématique de France,* t. XXVII, p. 194).

la méthode, telle qu'elle vient d'être exposée, ne renferme théoriquement rien de plus que la théorie du prolongement analytique et ne peut conduire à des résultats auxquels on ne saurait parvenir au moyen de cette théorie.

L'emploi de l'intégrale de Cauchy.

Nous allons indiquer une méthode, basée sur la considération de l'intégrale de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(x)\,dx}{x - z}$$

et permettant d'obtenir une infinité de solutions du problème du prolongement analytique, solutions parmi lesquelles il y en a une infinité qui sont aussi générales que la solution de M. Mittag-Leffler.

L'intégrale de Cauchy donne l'expression de $f(z)$ sous la forme de la somme d'une infinité de fractions simples $\frac{1}{x-z}$, x parcourant tout ce contour C; nous déduirons le prolongement analytique de $f(z)$ du prolongement analytique de chacune de ces fractions, ou, ce qui revient au même, des fractions $\frac{1}{1-\frac{z}{x}}$.

Nous supposerons que l'on connaisse un moyen de prolonger analytiquement la série

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots,$$

ce moyen n'employant d'ailleurs que des expressions *linéaires* par rapport à $z, z^2, \ldots, z^n, \ldots$.

D'une manière plus précise ([1]), supposons que nous sachions déterminer une infinité de séries entières

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

([1]) On pourrait donner au mot *linéaire* un sens plus général; supposer, par exemple, que les expressions linéaires par rapport aux z^n figurent sous des signes d'intégration, et que l'intégration terme à terme n'est pas possible. Le cas étudié dans le texte nous suffira.

pouvant, en particulier, se réduire à des polynomes et telles que l'on ait, quel que soit z à l'intérieur d'une aire déterminée A,

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n=\infty} f_n(z).$$

Les séries $f_n(z)$ doivent évidemment converger lorsque z est intérieur à A.

Nous supposerons que l'aire A comprend à son intérieur le cercle de convergence, bien que cette hypothèse ne soit pas absolument indispensable [1]. Enfin, nous admettrons que si A′ est une aire finie *intérieure* à A (les contours des deux aires n'ayant pas de point commun) $f_n(z)$ tend uniformément vers $f(z)$ lorsque z est intérieur à A′, c'est-à-dire qu'étant donné à l'avance un nombre ε on peut déterminer un nombre n' tel que l'hypothèse

$$n \geqq n'$$

entraîne

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

quel que soit z à l'intérieur de A′.

Ceci posé, écrivons l'intégrale de Cauchy sous la forme suivante

$$2i\pi f(z) = \int_C \frac{f(x)}{x} \frac{1}{1-\frac{z}{x}}\, dx,$$

C étant un contour fermé quelconque, entourant l'origine et tel que tous les points singuliers de $f(z)$ lui soient extérieurs.

Il est clair que le point $\frac{z}{x}$ sera intérieur à A′, si le point z est intérieur à une aire que nous pouvons désigner par xA′ et que l'on obtient en multipliant par x chaque point de A′.

Désignons par $\mathcal{A}'$ l'aire commune à toutes les aires xA′, lorsque x parcourt le contour C; il résulte de ce qui précède qu'étant donné un nombre positif arbitrairement petit ε on peut déterminer un nombre n' tel que l'hypothèse

$$n > n'$$

---

[1] *Voir* LEAU, *Comptes rendus*, octobre 1898. J'ai employé pour la première fois l'intégrale de Cauchy, dans la théorie des séries divergentes, dans mon Mémoire *Sur les séries de Taylor*, etc., cité p. 94; j'ai énoncé le principe général de la méthode dans mon *Mémoire sur les séries divergentes*, p. 64.

entraîne

$$\left| \frac{1}{1 - \frac{z}{x}} - f_n\left(\frac{z}{x}\right) \right| < \varepsilon,$$

quel que soit x sur C et z à l'intérieur de $\mathcal{A}'$. Dès lors, si l'on suppose z intérieur à $\mathcal{A}'$ et si l'on remplace $\frac{1}{1 - \frac{z}{x}}$ par $f_n\left(\frac{z}{x}\right)$ dans l'intégrale qui définit $f(z)$, il est aisé d'avoir une limite supérieure de l'erreur commise. On aura

$$\left| 2i\pi f(z) - \int_C \frac{f(x)}{x} f_n\left(\frac{z}{x}\right) dx \right| < \mathrm{LM}\varepsilon,$$

en désignant par L la longueur de C et par M le maximum sur C du module de $\frac{f(x)}{x}$. Les nombres L et M étant fixes et ε arbitrairement petit, on a

$$(1) \qquad 2i\pi f(z) = \lim_{n=\infty} \int_C \frac{f(x)}{x} f_n\left(\frac{z}{x}\right) dx,$$

quel que soit z à l'intérieur de $\mathcal{A}'$. On peut affirmer de plus que le second membre tend *uniformément* vers sa limite. D'ailleurs, de même que A' diffère aussi peu que l'on veut [1] de A, l'aire $\mathcal{A}'$ diffère aussi peu que l'on veut de l'aire $\mathcal{A}$ commune à toutes les aires xA. La formule (1) est donc valable à l'intérieur de $\mathcal{A}$, mais pour pouvoir affirmer que le second membre tend *uniformément* vers sa limite il faut remplacer $\mathcal{A}$ par une aire *finie* et *intérieure* à A.

Si l'on pose

$$f_n(t) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} t + c_2^{(n)} t^2 + c_3^{(n)} t^3 + \ldots,$$

et si l'on remarque que la série $f_n(t)$ étant convergente à l'intérieur de A est uniformément convergente à l'intérieur de A', et par suite la série $f_n\left(\frac{z}{x}\right)$ uniformément convergente lorsque x est

---

(1) Lorsque les aires s'étendent à l'infini, on doit remplacer le plan par la sphère de Riemann pour entendre le vrai sens de cette expression. Un cercle de rayon R diffère *aussi peu que l'on veut* du plan tout entier, si R est susceptible de croître indéfiniment.

sur C et z intérieur à $\mathcal{A}'$, la formule (1) devient

$$f(z) = \lim_{n=\infty} F_n(z),$$

en posant

$$F_n(z) = c_0^{(n)} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(x)}{x} + c_1^{(n)} z \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(x)}{x^2} + \ldots.$$

Or, si l'on pose

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(x)}{x^{n+1}} = u_n,$$

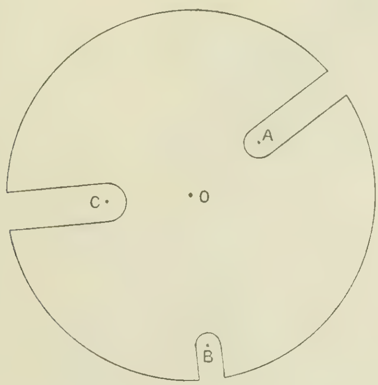
d'où

$$F_n(z) = c_0^{(n)} u_0 + c_1^{(n)} u_1 z + c_2^{(n)} u_2 z^2 + \ldots.$$

On voit que les $F_n(z)$ sont déterminées au moyen des nombres fixes $c_p^{(n)}$ qui caractérisent la méthode employée, et des coefficients de $f(z)$.

On aura une aire $\mathcal{A}$ aussi grande que possible en choisissant le contour C de la manière suivante (*fig.* 17) : traçons autour de

Fig. 17.



chaque point singulier de $f(z)$ un cercle de rayon ε, menons à ce cercle les tangentes parallèles à la droite qui joint ce point singulier à l'origine, et prolongeons ces tangentes, dans la direction opposée à celle qui va à l'origine, jusqu'à un cercle de rayon R. Dans cette construction, on ne tient pas compte des points singuliers situés à l'extérieur du cercle de rayon R. Le contour C se composera des demi-cercles de rayon ε, situés du côté de l'origine, entre les points de contact des tangentes, des portions de tangentes comprises entre le point de contact et le cercle de rayon R et des arcs de ce dernier cercle qui ne sont pas compris entre deux tangentes à un même cercle de rayon ε. Nous avons fait la figure dans le cas de trois points singuliers A, B, C.

Il est aisé de voir que, en supposant ε assez petit et R assez grand, l'aire $\mathcal{A}$ diffère aussi peu que l'on veut (1) de l'aire S commune aux régions yA, en désignant par y les divers points singuliers de $f(z)$. La méthode s'applique d'ailleurs pour tous les points intérieurs à S; elle s'applique uniformément pour les points intérieurs à une aire finie S′ intérieure à S; *mais on ne peut pas affirmer qu'elle ne s'applique pas pour les points extérieurs à* S. C'est pourquoi nous avons employé, pour établir l'existence du polygone de sommabilité, une autre méthode plus longue, mais plus précise. Celle-ci conduirait immédiatement à cette notion; il suffit de poser

$$f(z) = \lim_{n=\infty} \int_0^n e^{-a} e^{az}\, da,$$

c'est-à-dire de prendre

$$f_n(z) = \int_0^n e^{-a} e^{az}\, da;$$

c'est une fonction entière de z.

On aura, dès lors,

$$\mathrm{F}_n(z) = \int_0^n e^{-a}\, \mathrm{F}(az)\, da,$$

$\mathrm{F}(az)$ étant la fonction entière associée à $f(z)$; et, par suite, dans l'aire S,

$$f(z) = \lim_{n=0} \int_0 e^{-a}\, \mathrm{F}(az)\, da = \int_0^\infty e^{-a}\, \mathrm{F}(az)\, da.$$

L'aire S est d'ailleurs aisée à déterminer; l'aire A se compose

(1) *Voir* la note de la p. 166. L'aire $\mathcal{A}$ est toujours finie; l'aire S peut s'étendre à l'infini.

évidemment des points pour lesquels on a

$$\text{partie réelle de } z < 1;$$

et, en construisant les aires γA, on obtient le polygone de sommabilité; c'est ainsi que j'en ai démontré, pour la première fois, l'existence.

Mais nous ne nous étendrons pas sur ces démonstrations de résultats déjà obtenus d'une manière plus complète; nous renverrons aux Mémoires déjà cités.

Une remarque importante est la suivante. Au lieu d'écrire

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n=\infty} f_n(z),$$

on peut écrire

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty g_n(z),$$

en posant

$$g_0(z) = f_1(z),$$

$$g_n(z) = f_{n+1}(z) - f_n(z) \qquad (n > 0).$$

Si d'ailleurs on écrit

$$g_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots,$$

et si l'on pose

$$G_n(z) = F_{n+1}(z) - F_n(z),$$
$$G_0(z) = F_1(z),$$

on aura

$$G_n(z) = a_0^{(n)} u_0 + a_1^{(n)} u_1 z + a_2^{(n)} u_2 z^2 + \ldots$$

et

$$f(z) = \sum_0^\infty G_n(z),$$

la série étant convergente dans S et uniformément convergente dans toute aire finie S′ intérieure à S.

Avant de passer à l'étude des cas où la méthode précédente donne des résultats aussi généraux que ceux de M. Mittag-Leffler nous allons établir une formule particulièrement simple, que l'on obtient en prenant pour $\frac{1}{1-z}$ l'un des développements que fournit la série de Taylor. On a

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}(1+z) + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}(1+z)^n + \ldots.$$

Le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série s'écrit, en désignant par C_n^p les coefficients binomiaux,

$$\frac{1}{2^{n+1}}(1 + C_n^1 z + C_n^2 z^2 + \ldots + C_n^p z^p + \ldots C_n^n z^n).$$

Dès lors, soit

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

la série de Taylor proposée, dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini. En posant

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}}(a_0 + C_n^1 a_1 z + \ldots + C_n^p a_p z^p + \ldots + C_n^n a_n z^n)$$

le développement

$$f(z) = \sum P_n(z)$$

est convergent dans une région aisée à déterminer d'après ce qui précède, région qui dépasse le cercle de convergence en tout point non singulier.

Nous arrivons maintenant à l'étude des cas où la méthode précédente donne un développement valable dans toute l'*étoile*. Pour cela il est *nécessaire et suffisant* que la région A comprenne tout le plan, sauf la droite $(1, +\infty)$, c'est-à-dire les valeurs de z réelles et supérieures à un [1].

Or, M. Runge [2] a montré que l'on pouvait obtenir pour $\frac{1}{1-z}$ un développement satisfaisant à la condition précédente et M. Painlevé [3] a donné d'autres procédés pour obtenir de tels dévelop-

---

[1] La série $\sum g_n(z)$ ne peut converger uniformément dans une région annulaire entourant le point $z=1$, d'après une proposition bien connue.

[2] *Acta mathematica*, t. VI.

[3] *Comptes rendus*, 1898. Indiquons aussi que M. Painlevé (*Comptes rendus*, 25 mai 1899) a montré que l'on peut déduire, de certains développements obtenus par lui dans le cas des variables réelles, des séries ayant les mêmes propriétés que celles de M. Mittag-Leffler. Enfin, M. Hilbert avait aussi développé en séries de polynomes les fonctions analytiques dans une aire connexe quelconque (*Göttinger Nachrichten*, 6 mars 1897).

pements. Soit

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty g_n(z) \tag{1}$$

un développement de M. Runge, de M. Hilbert ou de M. Painlevé; les $g_n(z)$ sont des polynomes; la série converge dans tout le plan, sauf pour les valeurs réelles de z supérieures à *un* et converge *uniformément* dans toute région *finie* A′ intérieure à sa région de convergence.

Dès lors, *si l'on pose*

$$g_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} c_p^{(n)} z^p,$$

$$\gamma_p^{(n)} = u_p c_p^{(n)},$$

$$G_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \gamma_p^{(n)} z^p,$$

la série

$$f(z) = \sum_0^\infty G_n(z) \tag{2}$$

convergera dans toute l'étoile, la convergence étant uniforme dans toute région finie intérieure à l'étoile.

On peut d'ailleurs choisir les $g_n(z)$ de manière que la convergence de la série (1) soit *absolue;* il en sera alors visiblement de même pour la série (2); nous ferons cette hypothèse, pour simplifier les démonstrations ultérieures, bien qu'elle ne soit pas indispensable [1].

La proposition précédente offre l'avantage de faire connaître une infinité de développements analogues à celui de M. Mittag-Leffler; mais cet avantage restera assez mince, tant que ces développements seront plus compliqués que celui de M. Mittag-Leffler, c'est-à-dire tant qu'on n'aura pas perfectionné suffisamment les méthodes de MM. Runge et Painlevé pour obtenir des coefficients $c_p^{(n)}$ dont la loi soit simple.

Mais nous allons voir que la méthode que nous venons d'exposer,

---

[1] *Voir,* à ce sujet, BOREL, *Addition au Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica,* t. XXIV, p. 383).

en mettant en évidence le caractère *distributif* (¹) de la formation des séries, suggère naturellement l'idée de considérations qui vont nous conduire à des résultats dignes d'intérêt.

Nous allons d'ailleurs étudier seulement sur un cas particulier une proposition qui s'étend à des cas bien plus généraux (²). Nous supposerons que l'on a choisi un développement bien déterminé

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty g_n(z),$$

$$g_n(z) = \sum_0^{kn} c_p^{(n)} z^p$$

absolument et uniformément convergent dans toute aire A′ (p. 171).

Soit dès lors

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{A_n}{z - e^{2i\pi n\sqrt{2}}} \tag{3}$$

une série de fractions rationnelles; la série $\Sigma|A_n|$ est supposée convergente. La fonction $f(z)$ est visiblement holomorphe à l'intérieur du cercle C de rayon *un*; elle admet un développement de Taylor

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est au moins égal à un. D'ailleurs les points $e^{2i\pi n\sqrt{2}}$ sont évidemment denses sur tout le cercle C et, dès lors, l'hypothèse de la convergence de la série $\Sigma|A_n|$ entraîne, non seulement que le cercle C est bien le cercle de convergence de $f(z)$, mais encore que $f(z)$ admet ce cercle comme coupure. L'étoile A relative à $f(z)$ se réduit donc à l'aire du cercle C, et il semble que la transformation en série de polynomes ne puisse

(¹) *Voir* les intéressants travaux de M. Pincherle et notamment son Mémoire *Sur le calcul fonctionnel distributif* (*Math. Annalen*, t. XLIX, p. 325). Il serait intéressant de rapprocher les idées de M. Pincherle de celles qui sont exposées dans ce Livre; je le ferai peut-être un jour; pour le moment, je renverrai simplement au Livre de M. Hadamard cité p. 138.

(²) *Voir* Borel, *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta mathematica*, t. XXIV, p. 309).

donner rien de plus que la série de Taylor. Posons cependant

$$\gamma_p^{(n)} = u_p c_p^{(n)}$$

$$G_n(z) = \sum_0^{kn} \gamma_p^{(n)} z^p$$

$$f(z) = \sum_0^{\infty} G_n(z). \tag{4}$$

Nous allons voir que, si l'on choisit convenablement les nombres A_n, *cette dernière série convergera en des points extérieurs au cercle* C.

Dans ce but, marquons sur le cercle C tous les points $e^{2\pi i n\sqrt{2}}$; considérons chacun de ces points comme le milieu d'un arc D_n de longueur $\frac{\pi}{n^3}$; la somme des longueurs des arcs D_n est égale à

$$\pi\left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right] < 2\pi,$$

c'est-à-dire inférieure à la longueur totale de la circonférence; il y a donc sur la circonférence une infinité de points n'appartenant à aucun de ces arcs (¹). Soit M l'un de ces points; nous allons prouver que l'on peut choisir les A_n tels que, si l'on prolonge le rayon OM au delà de M, *la série* (4) *converge absolument sur toute la demi-droite* D *ainsi obtenue. Elle converge, de plus, uniformément sur tout segment fini de cette droite, et sa somme est d'ailleurs égale à celle de la série* (3).

Pour démontrer cette proposition, traçons un cercle Γ ayant pour centre l'origine et pour rayon un nombre quelconque $R > 1$; nous démontrerons la convergence absolue et uniforme de la série (4) sur la portion δ de la demi-droite D intérieure à ce cercle.

Considérons l'aire A'_n définie de la manière suivante : soient Δ,

---

(¹) Cette proposition peut paraître évidente; on en trouvera une démonstration rigoureuse dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 41-43. On peut montrer aussi qu'il y a sur tout arc de la circonférence une infinité non dénombrable de points qui n'appartiennent qu'à un *nombre limité* des segments D_n. Ceux de ces points qui ne coïncident avec le milieu d'aucun des arcs D_n ont la même propriété que le point M du texte.

Δ_1 les demi-droites dont les points ont respectivement pour arguments

$$-\frac{\pi}{2n^3}, \quad +\frac{\pi}{2n^3}.$$

Soient P et P_1 les points d'intersection de ces demi-droites avec C, Q et Q_1 leurs points d'intersection avec Γ. Traçons un cercle γ ayant pour centre le point $z = 1$ et tangent à Δ et Δ_1 en P et P_1 ; soit α celui des arcs PP_1 de γ qui est inférieur à π; soit β celui des arcs QQ_1 de Γ qui est supérieur à π. L'aire A'_n que nous voulons définir est limitée par la droite PQ, l'arc β, la droite $Q_1 P_1$, l'arc α. La série

$$\frac{1}{1-z} = \sum_0^\infty g_m(z)$$

étant absolument et uniformément convergente à l'intérieur de A'_n, il existe un nombre M_n tel que l'on ait, quel que soit z à l'intérieur de A'_n,

$$\sum_0^\infty |g_n(z)| < M_n.$$

Nous choisirons les nombres A_n de telle manière que la série

$$\Sigma |A_n| M_n$$

soit convergente ; il suffira par exemple de prendre

$$|A_n| \quad \frac{M_n}{n^2}.$$

Considérons maintenant la série

$$(3) \qquad f(z) = \sum \frac{A_n}{z - e^{2\pi i n\sqrt{2}}},$$

que l'on peut écrire

$$(3)' \qquad f(z) = \sum \frac{B_n}{1 - z e^{-2\pi i n\sqrt{2}}}$$

en posant

$$B_n = -A_n e^{-2\pi i n\sqrt{2}}.$$

On a, d'ailleurs,

$$|B_n| = |A_n|.$$

Chacun des termes de la série (3)' peut être développé, comme

$\frac{1}{1-z}$, de sorte que l'on peut écrire

$$(5) \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \left[\sum_{m=0}^{m=\infty} g_m\left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right].$$

Tout revient à démontrer que l'on peut intervertir l'ordre des sommations dans la série double; or, il est manifeste que, lorsque z est situé sur le segment δ, le point $ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}$ est intérieur à l'aire A'_n et que l'on a, par suite,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left| g_m\left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right| < M_n.$$

Il en résulte que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |B_n| \left[\sum_{m=0}^{m=\infty} \left| g_m\left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right| \right],$$

obtenue en remplaçant dans (5) chaque terme par sa valeur absolue, est convergente, puisque la série

$$\Sigma |B_n| M_n$$

l'est; donc la série double (5) est *absolument* convergente et l'on peut écrire

$$f(z) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n g_m\left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) \right],$$

ou, en posant

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n g_m\left(ze^{-2\pi i n\sqrt{2}}\right) = G_m(z),$$

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} G_m(z).$$

Nous laisserons à nos lecteurs le soin de démontrer que les polynomes $G_m(z)$ coïncident avec ceux qui ont été définis page 171, et aussi que la convergence est uniforme. Ces démonstrations ne présentent aucune difficulté; on les trouvera d'ailleurs dans le Mémoire cité en Note, page 172. Nous devons aussi renvoyer à ce Mémoire pour les conséquences de la proposition précédente au point de vue de la théorie générale des fonctions analytiques, conséquences étrangères à notre sujet actuel.

Les développements de M. Mittag-Leffler et la théorie générale des séries divergentes. — Conclusion.

Nous donnerons le nom générique de *développements de M. Mittag-Leffler*, ou, pour abréger, de *développements* (M), à tous les développements dont nous venons de démontrer l'existence et qui convergent dans toute l'étoile A. D'ailleurs, lorsque l'on parlera d'un développement (M), il faudra évidemment supposer que l'on a fait choix d'un développement bien déterminé, qui restera le même dans tout le raisonnement; ce développement pourra d'ailleurs être choisi arbitrairement parmi l'infinité de développements (M) possibles.

La proposition qui termine le paragraphe précédent entraîne la conséquence suivante : *Un développement* (M) *est toujours, pour un choix convenable de la fonction $f(z)$, convergent en dehors de l'étoile* A *qui correspond à cette fonction*. Par conséquent l'emploi des développements (M), qui semblait au premier abord ne pouvoir rien donner de plus que la théorie du prolongement analytique, conduit à certains résultats dans des cas où cette théorie n'est pas applicable : *cet emploi se rattache par là à la théorie des séries divergentes*.

En effet, les procédés qui permettent seulement de sommer des séries divergentes dont la somme serait fournie aisément par la théorie du prolongement analytique (*voir* p. 120) ne peuvent être considérés comme constituant une véritable théorie des séries divergentes; ce sont simplement des transformations plus ou moins élégantes de la théorie du prolongement analytique; telles sont les théories développées dans le Chapitre V; tel est aussi le théorème de M. Mittag-Leffler, sous sa forme primitive. D'ailleurs ces transformations peuvent être de la plus grande importance dans les applications; mais, au point de vue de la théorie générale des fonctions, elles ne sauraient nous apprendre rien de plus que la théorie dont elles sont issues.

Il n'en est pas de même des méthodes qui permettent soit d'obtenir la somme d'une série de Taylor à rayon de convergence fini dans une direction suivant laquelle le prolongement analytique est impossible; soit d'obtenir, dans une région quelconque, la somme d'une série de Taylor à rayon de convergence nul.

Nous avons déjà vu que les développements de M. Mittag-Leffler permettent d'atteindre le premier de ces résultats; ils permettent aussi d'atteindre le second.

Soit

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

une série de fractions rationnelles; nous supposons que les a_n sont des nombres *positifs* qui tendent vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Les a_n étant donnés, il est évidemment possible de choisir les A_n de manière que la série $f(z)$ et toutes ses dérivées convergent pour $z = 0$; il suffit de supposer, par exemple,

$$|A_n| < e^{-\frac{1}{a_n}}.$$

Les A_n étant ainsi choisis, désignons par $f^{(p)}(0)$ la valeur que prend la série $f^{(p)}(z)$ lorsqu'on y fait $z = 0$ et posons

$$u_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}.$$

La série

$$f_1(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \ldots$$

sera, en général (¹), divergente. Plaçons-nous dans le cas où elle l'est effectivement et formons le développement (M) correspondant

$$f_1(z) = \sum_0^{\infty} G_n(z),$$

$$G_n(z) = \sum_0^{k_n} c_p^{(n)} u_p z^p.$$

On peut choisir les nombres A_n *de telle manière que ce développement* (M) *converge dans tout le plan, sauf pour les valeurs*

(¹) C'est-à-dire si les a_n et les A_n sont *quelconques*. D'une manière plus précise, il est possible, les a_n étant donnés, de déterminer des nombres A_n, satisfaisant aux inégalités précédentes et tels que la série $f_1(z)$ soit divergente. Ce résultat, aisé à établir, suffit pour justifier toutes nos considérations sur $f(z)$ et $f_1(z)$.

réelles négatives de z; il est alors, en chaque point, égal à la série $f(z)$.

Cette proposition se démontre très aisément, par des considérations tout à fait semblables à celles qui terminent le paragraphe précédent; il est donc inutile de détailler ici cette démonstration qui ne nous apprendrait rien de nouveau; nous renverrons au Mémoire cité les lecteurs qui préféreront ne pas la reconstituer eux-mêmes.

La théorie des développements (M) permet donc de sommer des séries divergentes, d'une manière indépendante de la théorie du développement analytique; peut-on en conclure qu'elle constitue une véritable théorie des séries divergentes, susceptible, *à ce titre,* d'applications?

Nous avons déjà insisté à diverses reprises sur l'importance qu'il y a, lorsque l'on considère plusieurs séries divergentes, à pouvoir les combiner entre elles par voie d'addition et de multiplication; à pouvoir aussi, si les termes sont fonction d'une variable, les différentier et les intégrer.

Or, il est clair qu'au sujet des développements (M), on peut énoncer le théorème suivant :

Soient

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

$$g(z) = v_0 + v_1 z + v_2 z^2 + \ldots \tag{2}$$

deux séries de Taylor à rayon de convergence fini; soit $z = z_0$ un point tel que le segment qui le joint à l'origine ne renferme aucun des points singuliers de ces deux fonctions; on pose

$$\alpha_p^{(n)} = u_p c_p^{(n)}, \tag{3}$$

$$\beta_p^{(n)} = v_p c_p^{(n)}, \tag{4}$$

les constantes $c_p^{(n)}$ ayant le même sens que plus haut; puis

$$F_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \alpha_p^{(n)} z^p,$$

$$G_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \beta_p^{(n)} z^p,$$

et l'on considère les deux développements M,

$$(5) \qquad f(z_0) = \sum_0^\infty F_n(z_0),$$

$$(6) \qquad g(z_0) = \sum_0^\infty G_n(z_0).$$

On a

$$(7) \qquad f(z_0)g(z_0) = \sum_0^\infty H_n(z_0);$$

en posant

$$H_n(z) = \sum_{p=0}^{p=k_n} \gamma_p^{(n)} z^p,$$

$$(8) \qquad \gamma_p^{(n)} = w_p c_p^{(n)},$$

$$(9) \qquad w_p = u_0 v_p + u_1 v_{p-1} + u_2 v_{p-2} + \ldots + u_p v_0.$$

Les formules (3) et (4) permettent d'ailleurs d'exprimer les $\gamma_p^{(n)}$ au moyen seulement des $\alpha_p^{(n)}$, des $\beta_p^{(n)}$ et des $c_p^{(n)}$ qui sont des données fondamentales dans la question. On obtient aisément avec (3), (4), (8) et (9):

$$(10) \qquad \gamma_p^{(n)} = \frac{1}{c_p^{(n)}} \left[\alpha_0^{(n)} \beta_p^{(n)} + \alpha_1^{(n)} \beta_{p-1}^{(n)} + \ldots + \alpha_p^{(n)} \beta_0^{(n)} \right].$$

La formule (7) donne donc l'expression du produit des deux séries (M) (5) et (6) au moyen seulement des coefficients de ces séries. On peut dire que la formule (10) est la *formule fondamentale* [1] *de multiplication des fonctions* (M) *définies par les constantes* $c_p^{(n)}$.

La proposition qui a été énoncée exprime que cette formule est applicable dans un cas déterminé; cette proposition est d'ailleurs évidente : car la fonction $f(z)g(z)$ n'admettant pas d'autres

---

(1) Il n'y a pas à s'arrêter au cas où, dans cette formule, $c_p^{(n)}$ est nul pour certaines valeurs de n et de p; pour ces valeurs $\alpha_p^{(n)}$, $\beta_p^{(n)}$, $\gamma_p^{(n)}$ sont aussi nuls.

points singuliers que ceux de $f(z)$ et de $g(z)$, le développement (M) correspondant à ce produit converge pour $z = z_0$, ce qui donne la formule (7).

Mais la question importante serait de savoir si la règle de multiplication qui vient d'être formulée peut s'étendre à d'autres cas qu'à celui-ci, où elle est à peu près inutile pour les raisons même qui la rendent évidente.

Il ne serait pas malaisé de démontrer que, si l'on considère deux séries $f(z)$ et $g(z)$ définies par des séries de fractions rationnelles

$$f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

$$g(z) = \sum \frac{B_n}{z - b_n},$$

et ayant, soit les propriétés de la série étudiée p. 174, soit les propriétés de la série signalée p. 177, la règle de multiplication s'applique à ces séries sur toute droite sur laquelle on sait démontrer leur convergence uniforme.

Mais ici encore on se trouve en présence de fonctions définies autrement que par les séries divergentes, et dont il est aisé d'obtenir le produit directement, en multipliant entre elles les deux séries de fractions rationnelles.

Ce qui serait nécessaire, ce serait de prouver que, si l'on a deux séries divergentes dont on ne connaît pas l'origine, et que l'on peut sommer en les transformant en développements (M), sans que la théorie du prolongement analytique permette de rendre compte de ce fait, la règle de multiplication s'applique à ces séries. Il faudrait tout au moins montrer qu'il en est ainsi dans des cas étendus, à définir d'une manière précise.

Tant qu'on n'aura pas démontré cette proposition [1], *la théorie des développements* (M) *ne sera pas une théorie des séries divergentes*. En effet, ce qu'on doit demander à une théorie des séries divergentes, c'est d'abord d'attribuer une somme à des séries qui n'en avaient point; or, toutes les séries que permet de sommer la théorie des développements (M) ont une somme déjà connue, soit

[1] Nous laissons de côté, pour abréger, les propositions analogues relatives à l'intégration et à la différentiation.

par la théorie du prolongement analytique, soit par le calcul direct des séries de fractions rationnelles qui ont fourni la série divergente.

De plus, une théorie des séries divergentes doit permettre, par des calculs effectués sur de telles séries, de démontrer des résultats qui, énoncés ensuite indépendamment de toute introduction de séries divergentes, constituent des propositions rigoureuses, se rattachant à des théories classiques. Tels sont les résultats obtenus dans les Chapitres I, II, III, relativement à l'application aux équations différentielles de trois théories des séries divergentes : la théorie de M. Poincaré, la théorie de Stieltjes généralisée, et la théorie des séries absolument sommables.

Or, pour que ces applications soient possibles, il est nécessaire, comme M. Poincaré a été le premier à le montrer pour les séries asymptotiques, que les règles du calcul puissent être appliquées aux séries divergentes étudiées; nous avons vu qu'il n'en est pas ainsi pour les développements (M), sauf dans les cas où il est plus commode de se passer de l'intermédiaire des séries divergentes.

Ainsi, *la théorie des développements* (M) *ne constitue pas actuellement une théorie des séries divergentes*. Nous avons cependant tenu à donner à cette théorie une large place dans ce Livre, car nous espérons fermement qu'au prix peut-être de quelques restrictions et de quelques modifications, n'en altérant pas le caractère essentiel, on pourra en déduire une théorie générale des séries divergentes.

Aussi ne faudrait-il pas croire que les remarques précédentes soient inspirées par le désir de diminuer l'importance de la théorie des développements de M. Mittag-Leffler; nul plus que moi n'est persuadé de cette importance; ces remarques sont destinées au contraire à provoquer des recherches de nature à augmenter encore la place, déjà très considérable, que cette théorie nouvelle occupe dans la théorie des fonctions.

Il est en effet bien probable que, le jour où l'on serait arrivé à déduire, de la théorie des séries de M. Mittag-Leffler, une théorie générale des séries divergentes, cette théorie générale aurait la plus grande influence sur les progrès de l'Analyse dans diverses directions. Elle comprendrait d'ailleurs, vraisemblablement, comme cas particuliers, les diverses théories des séries divergentes que nous avons développées ou esquissées dans ce Livre; ces théories particulières disparaîtraient alors, fondues dans la théorie générale.

Leur étude n'aurait cependant pas été inutile, car c'est le plus souvent l'étude approfondie des cas particuliers simples qui met sur la voie de la méthode à suivre pour traiter les cas les plus généraux.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

29427 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.